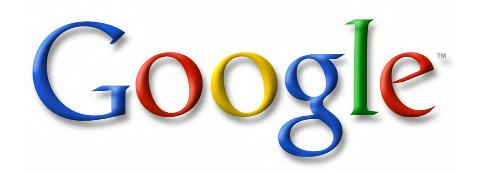
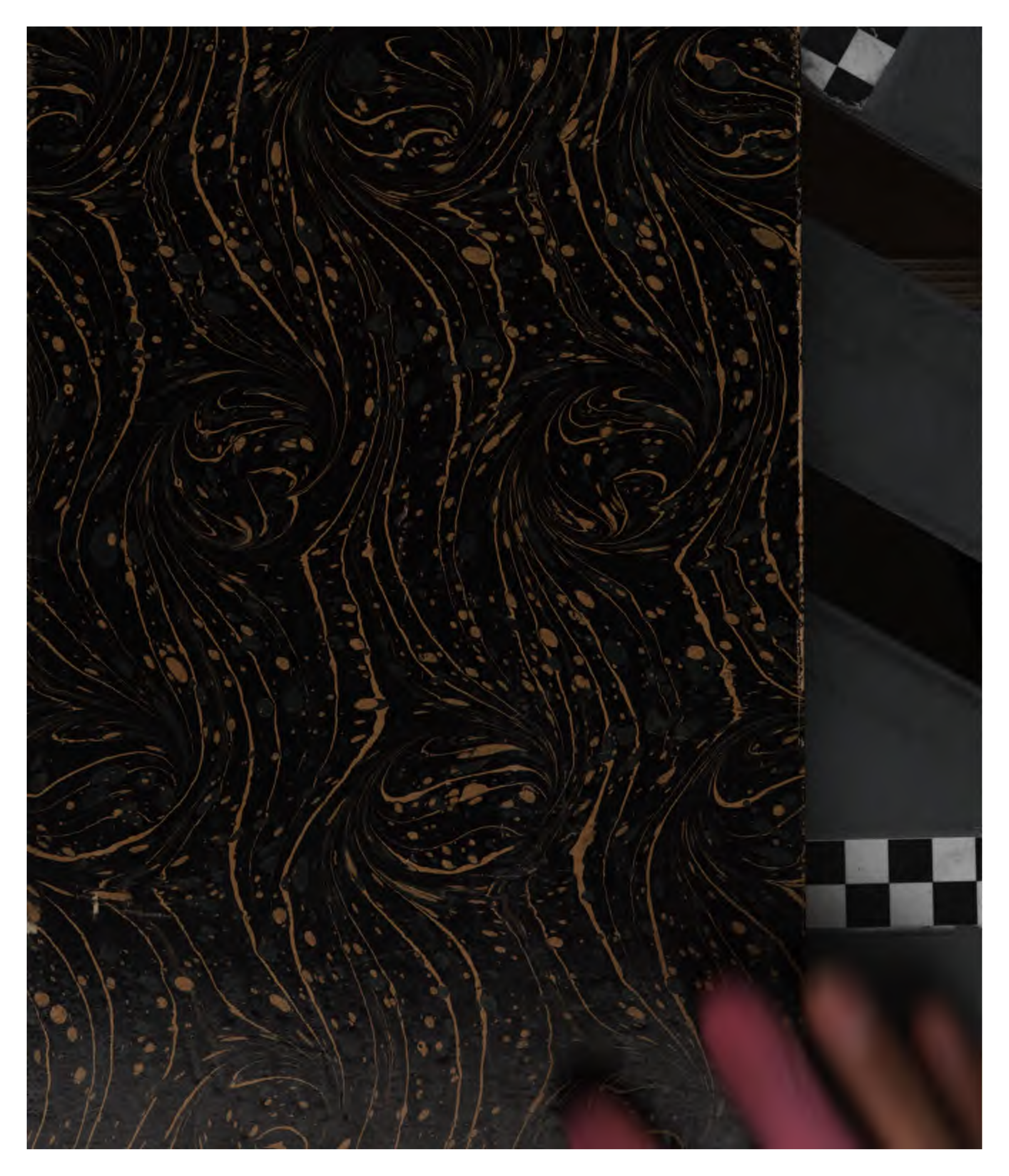




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Zweiundachtzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1877.
Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des zweiundachtzigsten Bandes.

Druckfehler.

Band 81.

Seite 354, Zeile 12 und 13 von unten und Seite 356, Zeile 10 und 11 von unten sind die rechten Seiten der drei Gleichungen noch mit dem Factor 2 zu multipliciren.

Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

1. Die linearen Systeme von Flächen n^{ter} Ordnung stehen in der innigsten Beziehung zu den Flächen n^{ter} Classe, und ihre Theorie ist im Grunde identisch mit der projectivischen Theorie der letzteren. Die Untersuchung jener Flächensysteme führt vor Allem zu der erweiterten Polarentheorie der Fläche Φ^n n^{ter} Classe (§. 4.), insbesondere auch zu denjenigen Flächen n^{ter} und niedrigerer Ordnung, welche ich „apolar zu Φ^n" genannt habe*). Sie lässt auch ihrerseits die wechselseitigen Beziehungen apolarer Flächen als fundamentale erscheinen.

Namentlich stellt sich alsbald heraus, dass für den Rechner die beiden Aufgaben:

„***Alle Flächen n^{ter} Ordnung zu bestimmen, die zu einer gegebenen Fläche n^{ter} Classe apolar sind,***" und

„***Alle Ebenen zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt gehen***",

nicht wesentlich von einander verschieden sind, obgleich die letztere Aufgabe der Geometrie des Raumes von drei Dimensionen angehört, die erstere dagegen der Geometrie des Flächensystemes von

$$N(n) = \frac{(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3} - 1$$

Dimensionen. Denn wie die homogenen Coordinaten eines Punktes und einer durch ihn gehenden Ebene einer für sie linearen Gleichung genügen müssen, so auch die homogenen Coordinaten einer Fläche n^{ter} Classe und einer zu ihr apolaren Fläche n^{ter} Ordnung (4.); und zwar enthält die letztere Bedingungsgleichung die erstere als speciellen Fall (für $n = 1$).

2. Wegen dieser beachtenswerthen Analogie scheint es mir zweckmässig, von zwei zu einander apolaren Flächen Φ^m und F^n zu sagen: ***Die Fläche n^{ter} Ordnung F^n „stützt" oder „trägt" die Fläche m^{ter} Classe Φ^m***, und

*) Man vergleiche meine Arbeiten: „Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen," dieses Journal Bd. 78, S. 97—113, und „Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind," ebenda Bd. 79, S. 159—175.

umgekehrt: *Φ^m „stützt sich“ oder „ruht“ auf F^n.* Ist $m = n = 1$, so soll die Aussage: „der Punkt Φ^1 ruht auf der Ebene F^1 und F^1 trägt oder stützt den Punkt Φ^1“ selbstverständlich nichts Anderes bedeuten, als dass Φ^1 auf F^1 liegt und F^1 durch Φ^1 geht; in dem allgemeinen Falle aber werden wir nur dann sagen können, dass Φ^m auf F^n *liege*, wenn Φ^m aus m Punkten der F^n besteht*).

Beispielsweise können wir eine früher**) bewiesene Relation zwischen zwei zu einander apolaren Flächen nunmehr folgendermassen ausdrücken, wenn $n \geqq m$ ist:

Jede Φ^n, welche auf einer F^m ruht, kann aufgefasst werden als die n^{te} Nullfläche von unendlich vielen Massensystemen, deren sämmtliche Massenpunkte auf F^m ruhen (d. h. liegen).

Jede F^n, welche eine Φ^m stützt, kann aufgefasst werden als die n^{te} Nullfläche von unendlich vielen Werthsystemen, deren sämmtliche Werth-Ebenen die Φ^m stützen (d. h. berühren).

§ 1. Coordinaten algebraischer Flächen. F^n-Systeme und Φ^n-Gewebe.

3. Wir bezeichnen mit (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4), $(a_1, a_2, a_3, a_4), \ldots$ homogene Coordinaten von Punkten $x, y, a, \ldots$, und mit $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \ldots$ homogene Coordinaten von Ebenen $\xi, \alpha, \ldots$, so dass a in α liegt, wenn

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$$

ist. Dann repräsentiren die Gleichungen:

$$\mathrm{S}\frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!}a^{(n)}_{qrst}x_1^q x_2^r x_3^s x_4^t = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{S}\frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!}\alpha^{(n)}_{qrst}\xi_1^q \xi_2^r \xi_3^s \xi_4^t = 0$$

eine Fläche n^{ter} Ordnung F^n und eine Fläche n^{ter} Classe Φ^n, wenn die Summationen sich auf alle absoluten Zahlen q, r, s, t erstrecken, für welche $q+r+s+t = n$ ist. Die F^n reducirt sich auf die n-fache Ebene α, wenn allgemein $a^{(n)}_{qrst} = \alpha_1^q \alpha_2^r \alpha_3^s \alpha_4^t$ ist; doch pflegt man nach Herrn *Aronholds*

*) Herr *Rosanes* nennt in seiner Abhandlung „Ueber Systeme von Kegelschnitten“ (Mathem. Annalen Bd. VI, S. 265) zwei zu einander apolare Kegelschnitte, von denen nämlich der eine einem Poldreieck des anderen umschrieben ist, *„conjugirt.“* Anderseits wird in den „Vorlesungen über Geometrie“ von *Clebsch* (Bd. I, S. 385) gelegentlich auf ein System von Curven n^{ter} Classe aufmerksam gemacht, die *mit einer Curve n^{ter} Ordnung vereinigt liegen,* d. h., wie wir sagen würden, auf ihr ruhen. Ich ziehe diesen Ausdrucksweisen die obige vor, weil sie nicht nur bequemer ist, sondern auch (wie es durchaus nöthig ist) die durch Punktcoordinaten gegebenen Curven oder Flächen von den durch Linien- oder Ebenencoordinaten bestimmten unterscheidet.

**) Dieses Journal Bd. 78, S. 111 und Bd. 79, S. 164.

Darstellungsweise auch sonst ihre Gleichung symbolisch:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)^n = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_x^n = 0$$

zu schreiben. Ebenso reducirt sich die Fläche n^{ter} Classe Φ^n auf den n-fachen Punkt a, wenn allgemein $a_{qrst}^{(n)} = a_1^q a_2^r a_3^s a_4^t$ ist; in ihrer symbolischen Gleichung:

$$(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4)^n = 0 \quad \text{oder} \quad a_\xi^n = 0$$

sind in diesem Falle die a_i nicht blosse Symbole, sondern die Coordinaten des Punktes a.

4. Wir wollen die $N(n)+1 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ Coefficienten $\alpha_{qrst}^{(n)}$ oder $a_{qrst}^{(n)}$, durch deren $N(n)$ von einander unabhängige Verhältnisse (Quotienten) die F^n resp. Φ^n bestimmt ist, *die homogenen Coordinaten dieser Fläche* nennen. Wenn Φ^n auf F^n ruht, so müssen diese Flächencoordinaten $\alpha^{(n)}$ und $a^{(n)}$ der linearen Bedingungsgleichung:

$$\mathrm{S} \frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!} \alpha_{qrst}^{(n)} a_{qrst}^{(n)} = 0$$

genügen*), welche symbolisch geschrieben werden kann:

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4)^n = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_a^n = 0,$$

und wie oben (1.) behauptet wurde, für $n=1$ übergeht in die frühere Gleichung:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0.$$

Auf eine gegebene F^n stützen sich also unendlich viele Φ^n; um eine beliebige derselben zu bestimmen, können wir $N(n)$ ihrer Coordinaten $a^{(n)}$ willkürlich annehmen und sodann die letzte Coordinate aus der linearen Bedingungsgleichung berechnen. Von diesen auf F^n ruhenden Φ^n reduciren sich doppelt unendlich viele auf n-fache Punkte x; und zwar trägt F^n alle diese Punkte und ist ihr geometrischer Ort, weil die Bedingungsgleichung für $a_{qrst}^{(n)} = x_1^q x_2^r x_3^s x_4^t$ übergeht in die Gleichung der F^n. Wir erhalten demnach den einen der beiden reciproken Sätze:

Wenn eine Φ^n, die auf einer gegebenen F^n ruht, sich auf einen einzigen (n-fachen) Punkt reducirt, so liegt dieser Punkt auf F^n.

Wenn eine F^n, welche eine gegebene Φ^n stützt, sich auf eine einzige (n-fache) Ebene reducirt, so berührt diese Ebene die Φ^n.

5. Wir können die homogenen F^n-Coordinaten $\alpha^{(n)}$ und Φ^n-Coordinaten $a^{(n)}$ als veränderliche Grössen auffassen und wollen sie als solche mit $\xi_{qrst}^{(n)}$,

*) Dieses Journal Bd. 79, S. 165.

resp. $x^{(n)}_{qrst}$ bezeichnen. Durch die Variabeln $\xi^{(n)}$ kann dann jede der $N(n)$-fach unendlich vielen F^n des Raumes dargestellt werden, welche in ihrer Gesammtheit *das F^n-System $N(n)^{ter}$ Stufe* bilden; ebenso können die Variabeln $x^{(n)}$ $N(n)$-fach unendlich viele Φ^n darstellen, deren Gesammtheit ich *das Φ^n-Gewebe $N(n)^{ter}$ Stufe* *) nennen will.

Wenn aber die Coordinaten $\xi^{(n)}$ oder $x^{(n)}$ irgend einer homogenen Bedingungsgleichung unterworfen werden, so können sie nicht mehr jede beliebige F^n resp. Φ^n, sondern nur noch $N(n)-1$-fach unendlich viele solche Flächen darstellen. Und durch jede weitere homogene Bedingungsgleichung, welche weder eine Folge der vorhergehenden ist, noch auch eine derselben überflüssig macht, wird die Mannigfaltigkeit der durch die Coordinaten darstellbaren Flächen im Allgemeinen um noch eine Dimension vermindert. Wir können deshalb sagen:

Alle F^n oder Φ^n, deren Coordinaten beliebigen p homogenen Bedingungsgleichungen genügen, bilden im Allgemeinen ein F^n-System resp. Φ^n-Gewebe von $N(n)-p$ Dimensionen oder $N(n)-p^{ter}$ Stufe **).

In besonderen Fällen können diese Flächen eine Mannigfaltigkeit von mehr als $N(n)-p$ Dimensionen bilden, auch wenn der Voraussetzung gemäss keine der p Bedingungsgleichungen aus den übrigen folgt. Es können ähnliche Ausnahmen eintreten, wie bei dem Satze, dass drei Flächen F^m, F^n, F^p im Allgemeinen $m.n.p$ Punkte mit einander gemein haben; bei besonderer gegenseitiger Lage können F^m, F^n und F^p sich in allen Punkten einer Linie, z. B. einer Geraden, schneiden.

6. Jede einzelne homogene Bedingungsgleichung, der die Coordinaten einer F^n oder Φ^n genügen sollen, hebt gleichsam aus der Gesammtheit aller F^n oder Φ^n eine Mannigfaltigkeit von $N(n)-1$ Dimensionen heraus; und ein F^n-System oder Φ^n-Gewebe $N(n)-p^{ter}$ Stufe besteht in der Regel aus den gemeinschaftlichen Flächen der p Mannigfaltigkeiten $N(n)-1^{ter}$ Stufe,

---

*) Unterscheidende Benennungen für unendliche Mannigfaltigkeiten von Flächen n^{ter} Ordnung einerseits und Flächen n^{ter} Classe anderseits sind nicht mehr zu entbehren. Das Wort „Gewebe" hat Herr *Schröter* zuerst im obigen Sinne benutzt; er nennt eine zweifach unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Curven zweiter Classe ein *Kegelschnitt-Gewebe.*

**) Diese Stufenzahl $N(n)-p$ wähle ich, weil die meisten Fachgenossen gewohnt sind, mit *v. Staudt* unter „Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe" Mannigfaltigkeiten von 1, 2 resp. 3 Dimensionen zu verstehen. Die ältere Bezeichnung *Hermann Grassmanns* (in der linealen Ausdehnungslehre, Lpz. 1844, S. 21), welcher unter „System r^{ter} Stufe" eine Mannigfaltigkeit von $r-1$ Dimensionen versteht, lässt sich in der Geometrie wohl nicht mehr durchführen ohne Verwirrung hervorzurufen.

welche durch p solche homogene Bedingungsgleichungen bestimmt werden. Wie zwei Flächen sich in einer Linie, drei im Allgemeinen in discreten Punkten schneiden, so ***durchdringen sich*** 2, 3, p F^n-Systeme oder Φ^n-Gewebe $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe im Allgemeinen in einem F^n-Systeme oder Φ^n-Gewebe $N(n)-2^{\text{ter}}$, $N(n)-3^{\text{ter}}$ resp. $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe. Dasselbe heisst ***algebraisch,*** wenn die Bedingungsgleichungen, durch welche es bestimmt ist, sämmtlich algebraisch sind; es soll insbesondere ein ***lineares*** F^n-System resp. Φ^n-Gewebe genannt werden, wenn seine p von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen sämmtlich vom ersten Grade sind bezüglich der Flächencoordinaten*).

Ein lineares Flächensystem erster, zweiter oder dritter Stufe wird gewöhnlich ***Flächenbüschel, Flächenbündel*** resp. ***Flächengebüsch*** genannt.

Ein lineares Flächengewebe erster oder zweiter Stufe wird gewöhnlich ***Flächenschaar*** resp. ***Flächen-Schaarschaar*** genannt.

Die linearen Flächenmannigfaltigkeiten sind vergleichbar einerseits der Ebene und der Geraden des Raumes von drei Dimensionen, wenn man diese als geometrischen Ort von Punkten, anderseits dem Punkte und der Geraden, wenn man diese als Träger von Ebenen betrachtet. Das ebene Punktsystem und die gerade Punktreihe sind lineare Φ^1-Gewebe, der Ebenenbündel und der Ebenenbüschel erster Ordnung sind lineare F^1-Systeme zweiter und erster Stufe.

§. 2. Grad der algebraischen F^n-Systeme und Φ^n-Gewebe.

7. Da die F^n-Systeme und die Φ^n-Gewebe einander als reciproke Gebilde gegenüberstehen, so können alle Sätze, welche projectivische Eigenschaften der ersteren betreffen, ohne Weiteres auf die letzteren übertragen werden. Die Eigenschaften der ***algebraischen*** Flächenmannigfaltigkeiten hängen vornehmlich vom ***Grade*** derselben ab, den wir folgendermassen definiren:

Ein (algebraisches) F^n-System p^{ter} Stufe heisst „vom Grade g“ oder „g^{ten} Grades,“ wenn es mit einem linearen F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe im Allgemeinen g einzelne Flächen gemein hat.

Ein (algebraisches) Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe heisst „vom Grade g“ oder „g^{ten} Grades,“ wenn es mit einem linearen Φ^n-Gewebe $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe im Allgemeinen g einzelne Flächen gemein hat.

---

*) Das lineare F^n-System p^{ter} Stufe wird von Herrn *Cremona* (Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, No. 42) ein „sistema lineare di genere p e d'ordine n“ genannt.

Es gehen demnach durch p beliebige Punkte im Allgemeinen g Flächen eines F^n-Systemes p^{ter} Stufe g^{ten} Grades; denn alle durch p *beliebige* Punkte gehenden F^n bilden ein lineares F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe. Ausserdem ergiebt sich ohne Weiteres:

Ein F^n-System p^{ter} Stufe g^{ten} Grades hat mit einem linearen F^n-System $N(n)-r^{\text{ter}}$ Stufe im Allgemeinen ein F^n-System $p-r^{\text{ter}}$ Stufe g^{ten} Grades gemein, wenn $p>r$ ist.

Ein Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe g^{ten} Grades hat mit einem linearen Φ^n-Gewebe $N(n)-r^{\text{ter}}$ Stufe im Allgemeinen ein Φ^n-Gewebe $p-r^{\text{ter}}$ Stufe g^{ten} Grades gemein, wenn $p>r$ ist.

8. Ist von den p Bedingungsgleichungen, durch welche ein algebraisches F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe bestimmt wird, die i^{te} vom Grade g_i bezüglich der F^n-Coordinaten, so ist das F^n-System vom Grade $g_1.g_2.g_3\dots g_p$; denn $g_1.g_2.g_3\dots g_p$ Werthensysteme der Coordinatenverhältnisse giebt es im Allgemeinen, welche jenen p Bedingungsgleichungen und zugleich irgend $N(n)-p$ linearen Gleichungen genügen. — Selbstverständlich gelten derartige Sätze nur unter den Voraussetzungen, welche der Theorie der algebraischen Gleichungen zu Grunde liegen: alle imaginären Wurzeln müssen berücksichtigt und k-fache Wurzeln k-mal gezählt werden. So durchdringen sich allerdings zwei F^n-Systeme $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe vom Grade g_1 und g_2 im Allgemeinen in einem F^n-Systeme $N(n)-2^{\text{ter}}$ Stufe vom Grade $g_1 g_2$; doch können sie sich auch in einem F^n-Systeme $N(n)-2^{\text{ter}}$ Stufe vom Grade $\frac{1}{2}g_1 g_2$ berühren oder zweimal durchdringen, in welchem Falle dieses gemeinschaftliche System zweimal zu zählen ist.

9. Die algebraischen F^n-Systeme und Φ^n-Gewebe können ähnlich wie die algebraischen Flächen und Curven in mehrere andere von niedrigerem Grade zerfallen. Wenn z. B. ein F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe g^{ten} Grades alle Flächen eines linearen F^n-Systemes gleicher Stufe enthält, so zerfällt es in dieses und in ein F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe vom Grade $p-1$. Das letztere kann im Allgemeinen nicht durch weniger als $p+1$ Bedingungsgleichungen dargestellt werden. Die Lehre von den Raumcurven oder Φ^1-Geweben erster Stufe wirft einiges Licht auf die zahlreichen Fälle, die auf solche Art eintreten können.

Die besonderen Eigenschaften eines F^n-Systemes p^{ter} Stufe hängen nicht blos von dem Grade g desselben ab, sondern insbesondere auch davon, wie dieser Grad sich aus den Gleichungen des Systems ergiebt. So hat ein F^2-System siebenter Stufe vierten Grades sehr verschiedene Eigen-

schaften, jenachdem in ihm ein lineares und ein biquadratisches oder zwei quadratische F^2-Systeme achter Stufe sich durchdringen, oder aber ein quadratisches und ein kubisches System, welche ausserdem zwei lineare F^2-Systeme siebenter Stufe mit einander gemein haben.

10. Ein F^n-System p^{ter} Stufe g^{ten} Grades hat mit einem F^n-Systeme $N(n)-1^{ter}$ Stufe r^{ten} Grades im Allgemeinen ein F^n-System $p-1^{ter}$ Stufe gr^{ten} Grades gemein.

Ein Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe g^{ten} Grades hat mit einem Φ^n-Gewebe $N(n)-1^{ter}$ Stufe r^{ten} Grades im Allgemeinen ein Φ^n-Gewebe $p-1^{ter}$ Stufe gr^{ten} Grades gemein.

Besteht nämlich das F^n-System p^{ter} Stufe aus allen gemeinschaftlichen Flächen von p algebraischen F^n-Systemen $N(n)-1^{ter}$ Stufe, so ist der Satz links nur Wiederholung eines früheren (8.). Im anderen Falle aber beweist man ihn ähnlich wie den analogen Satz, dass eine Raumcurve g^{ten} Grades, welche einen selbständigen Theil der Durchdringungscurve von zwei algebraischen Flächen bildet, mit einer F^r im Allgemeinen $g.r$ Punkte gemein hat. Also man legt durch das F^n-System p^{ter} Stufe g^{ten} Grades p Systeme $N(n)-1^{ter}$ Stufe so hindurch, dass letztere sich ausserdem in F^n-Systemen p^{ter} Stufe von den Graden g_1, g_2, ... durchdringen, welche die oben behauptete Eigenschaft besitzen; dann gilt der Satz auch von dem Systeme g^{ten} Grades, weil dasselbe mit den übrigen Systemen p^{ter} Stufe zusammen aus den gemeinschaftlichen Flächen der p Systeme $N(n)-1^{ter}$ Stufe besteht. Dass die letzteren auf die verlangte Art angenommen werden können, ergiebt sich meistens sofort aus den Gleichungen des Systemes g^{ten} Grades.

11. Zu den F^n-Systemen niederen Grades, insbesondere zu den linearen, können sich die F^n-Systeme p^{ter} Stufe vom Grade g sehr verschieden verhalten. Es giebt unter ihnen solche, welche unendlich viele lineare F^n-Systeme $p-1^{ter}$ Stufe enthalten und den geradlinigen algebraischen Flächen vergleichbar sind; andere enthalten nur lineare F^n-Systeme $p-2^{ter}$ oder niedrigerer Stufe, noch andere nicht einmal F^n-Bündel oder F^n-Büschel. Z. B. die zweiten Polaren aller Punkte des Raumes bezüglich einer F^4 bilden ein F^2-System dritter Stufe achten Grades, welches keinen F^2-Büschel enthält. Der geometrischen Forschung eröffnet sich hier ein unbegrenztes, noch kaum betretenes Gebiet.

12. Zur Erläuterung des Vorhergehenden mögen die folgenden Bemerkungen dienen. Alle Kugelflächen des Raumes bilden ein lineares

F^2-System vierter Stufe; und da alle F^2, welche zu einer gegebenen Φ^3 apolar sind, ein lineares F^2-System fünfter Stufe bilden, so muss eine derselben eine Kugelfläche sein. Diejenigen Kugelflächen, welche eine gegebene rechtwinklig schneiden, bilden ein lineares F^2-System dritter Stufe. Alle Kegelflächen zweiter Ordnung bilden, weil die Discriminante ihrer Gleichung verschwindet, ein F^2-System achter Stufe vierten Grades, welches dreifach unendlich viele lineare F^2-Systeme fünfter Stufe enthält; zu einem F^2-Büschel gehören deshalb im Allgemeinen vier Kegelflächen. Alle Φ^2, von denen acht Paare conjugirter Ebenen beliebig gegeben sind, bilden eine Flächenschaar, und vier derselben reduciren sich folglich auf Curven zweiter Classe; sind nur vier Paare conjugirter Ebenen gegeben, so bilden die Φ^2 ein lineares Gewebe fünfter Stufe. Alle F^2, welche eine gegebene Gerade oder Ebene berühren, bilden ein F^2-System achter Stufe vom Grade zwei resp. drei, und ein F^2-Büschel enthält demnach im Allgemeinen drei F^2, die eine gegebene Ebene berühren, insbesondere auch drei Paraboloide; doch folgt daraus nicht, dass z. B. diejenigen F^2, welche sechs gegebene Ebenen berühren, ein F^2-System dritter Stufe vom Grade 3^6 bilden. Vielmehr sind zu diesen F^2 alle Ebenenpaare des Raumes zu rechnen, welche für sich allein ein specielles F^2-System sechster Stufe zehnten Grades bilden; und die Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, dass eine F^2 vier oder mehr gegebene Ebenen berührt, sind nicht von einander unabhängig.

13. Diejenigen F^3, von denen ein gegebenes Sechsflach ein Polsechsflach ist und deren Kernflächen folglich durch die zwanzig Eckpunkte des Sechsflaches gehen, bilden ein lineares F^3-System fünfter Stufe. Sämmtliche F^4, die eine Φ^2 stützen, bilden ein F^4-System 33ster Stufe zehnten Grades; dasselbe enthält neunfach unendlich viele lineare F^4-Systeme 24ster Stufe, denn alle F^4, auf welche eine gegebene Φ^2 sich stützt, bilden ein solches lineares System. Alle Punkte, deren erste Polaren bezüglich einer gegebenen F^5 zu jenem F^4-Systeme 33ster Stufe gehören, liegen folglich auf einer F^{10}, die eine Covariante der F^5 ist.*) — Alle F^n, welche einen Doppelpunkt besitzen, bilden ein F^n-System $N(n)-1$ter Stufe vom Grade $4(n-1)^3$. Ein sehr specielles lineares F^n-System $p$ter Stufe besteht aus allen F^n, welche durch $N(n)-p$ beliebig angenommene Punkte gehen.

---

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 79, S. 175.

§. 3. Lineare Systeme und Gewebe algebraischer Flächen.

14. Ein lineares F^n-System p^{ter} Stufe ist bestimmt durch $N(n)-p$ von einander unabhängige, lineare, homogene Bedingungsgleichungen zwischen den $N(n)+1$ Flächencoordinaten $\xi^{(n)}$. Dasselbe ist in allen F^n-Systemen enthalten, welche durch die einzelnen Bedingungsgleichungen oder durch irgend welche Combinationen derselben dargestellt werden. Wir können nun diese Gleichungen so umformen, dass sie $N(n)-p$ der Coordinaten durch die $p+1$ übrigen darstellen; alsdann enthält jede der Gleichungen noch $p+1$ Coefficienten, und es ergiebt sich:

Ein lineares F^n-System oder Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe hängt im Allgemeinen von $(N(n)-p).(p+1)$ willkürlichen Parametern ab; es giebt $(N(n)-p).(p+1)$-fach unendlich viele lineare F^n-Systeme resp. Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe.

Mit Leichtigkeit beweist man von diesem Satze ausgehend, dass die ersten Polaren aller Punkte des Raumes bezüglich einer F^{n+1} ein *specielles* lineares F^n-System dritter Stufe bilden, wenn $n>1$ ist. Für $p=1$ folgt: Es giebt $2N(n)-2$-fach unendlich viele F^n-Büschel und Knotenlinien $C^{n.n}$ derselben, also insbesondere vierfach unendlich viele Gerade, 16-fach unendlich viele Raumcurven $C^{2.2}$ vierter Ordnung u. s. w.

Zwei lineare F^n-Systeme p^{ter} und q^{ter} Stufe hängen von gleich viel willkürlichen Parametern ab, wenn $p+q=N(n)-1$ ist;

denn es wird $(N(n)-p).(p+1)=(N(n)-q).(q+1)$. Z. B. ein lineares F^n-System p^{ter} Stufe hängt ab:

von	16,	21,	24,	25,	24,	21,	16,	9	Parametern,
wenn	$p=1$,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	ist.

15. Werden aus der allgemeinen Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung:

$$\mathrm{S}\frac{n!}{q!r!s!t!}.\xi^{(n)}_{qrst}.x_1^q x_2^r x_3^s x_4^t = 0$$

mit Hülfe der $N(n)-p$ Bedingungsgleichungen eines linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe irgend $N(n)-p$ der Flächencoordinaten $\xi^{(n)}$ eliminirt und die $p+1$ übrigen mit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ bezeichnet, so nimmt dieselbe die Form an:

$$\lambda_0 F_0^n + \lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n + \cdots + \lambda_p F_p^n = 0.$$

Hierin sind die λ_i willkürliche Parameter und die F_i^n ganze homogene Functionen n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4. Die Gleichungen $F_i^n=0$ repräsentiren also $p+1$ Flächen n^{ter} Ordnung, und die obige Gleichung reprä-

sentirt alle Flächen des linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe, wenn den Parametern λ_i nach und nach alle möglichen Werthe beigelegt werden. Also:

Das lineare F^n-System p^{ter} Stufe wird dargestellt durch die Gleichung $\sum_{i=0}^{i=p} \lambda_i F_i^n = 0$, in welcher die λ_i willkürliche Parameter bezeichnen und die Gleichungen $F_i^n = 0$ gewisse $p+1$ von einander unabhängige Flächen des Systemes repräsentiren.

16. Wir können diesen Satz als eine ***zweite Definition des linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe*** betrachten; und zwar können wir die $p+1$ Flächen des Systemes, welche für $i=0, 1, 2, \dots p$ durch die Gleichungen $F_i^n = 0$ dargestellt werden, ganz beliebig annehmen, wenn nur keine derselben einem linearen F^n-Systeme angehört, das auf ähnliche Art durch die übrigen bestimmt ist. Während unsere erste Definition von der Gesammtheit aller F^n ausgeht, und durch Ausschliessung derjenigen F^n, deren Coordinaten den $N(n)-p$ linearen Bedingungsgleichungen nicht genügen, zu dem linearen F^n-System p^{ter} Stufe niedersteigt, baut diese zweite Definition dasselbe F^n-System gleichsam auf aus einzelnen F^n und den durch sie bestimmten F^n-Systemen erster, zweiter, ... $p-1^{\text{ter}}$ Stufe. So führen die Gleichungen von zwei Flächen n^{ter} Ordnung, $F_0^n = 0$ und $F_1^n = 0$, zu der Gleichung:

$$\lambda_0 F_0^n + \lambda_1 F_1^n = 0$$

des F^n-Büschels, welchem jene beiden Flächen angehören. Ist $F_2^n = 0$ die Gleichung einer dritten F^n, die nicht in diesem Büschel liegt, so repräsentirt die Gleichung:

$$\lambda_0 F_0^n + \lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n = 0$$

einen F^n-Bündel; u. s. w. Aus der Form dieser Gleichungen folgt ohne Weiteres, dass jeder Punkt, durch welchen zwei Flächen eines F^n-Büschels gehen, auch auf allen übrigen liegt, und dass die Flächen eines F^n-Bündels im Allgemeinen eine Gruppe von $n.n.n$ Punkten mit einander gemein haben.

17. Die zweite Definition des linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe ist ebenso leicht auf die erste zurückzuführen, wie diese auf jene. Wird nämlich die Gleichung:

$$\lambda_0 F_0^n + \lambda_1 F_1^n + \lambda_2 F_2^n + \dots + \lambda_p F_p^n = 0,$$

in welcher die F_i^n homogene Functionen n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen, nach Potenzen dieser Punktcoordinaten geordnet, und sodann der Coefficient von $x_1^q x_2^r x_3^s x_4^t$ gleich $\frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!} \cdot \xi_{qrst}^{(n)}$ gesetzt, so erhält man für die

$N(n)+1$ Coordinaten $\xi^{(n)}$ einer beliebigen durch jene Gleichungen darstellbaren F^n Ausdrücke, welche hinsichtlich der $p+1$ Parameter λ_i vom ersten Grade sind. Durch Elimination der λ_i aber ergeben sich $N(n)-p$ lineare homogene Gleichungen für die $\xi^{(n)}$, durch welche das lineare F^n-System p^{ter} Stufe ebenfalls bestimmt ist.

Aus der zweiten Definition folgt ohne Weiteres:

> ***Ein lineares F^n-System oder Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe ist völlig bestimmt, wenn von seinen Flächen beliebige $p+1$ linear unabhängige gegeben sind.***

Wenn den Parametern λ_i oder einigen derselben solche von Null verschiedenen Werthe beigelegt werden können, dass $\sum_{i=0}^{i=p}\lambda_i F_i^n$ identisch verschwindet für alle Werthe von x_1, x_2, x_3, x_4, so repräsentiren die Gleichungen $F_i^n=0$ Flächen, welche „linear von einander abhängen" und zur Bestimmung eines linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe nicht ausreichen (16.). In diesem Falle liefert die oben angedeutete Rechnung nicht $N(n)-p$ *von einander unabhängige* lineare Gleichungen für die $\xi^{(n)}$.

18. Zwei lineare F^n-Systeme p^{ter} und $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe haben im Allgemeinen *eine* F^n mit einander gemein, deren Coordinaten, abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor, aus den $N(n)$ linearen Gleichungen der beiden Systeme berechnet werden können. Insbesondere ergiebt sich (vgl. 7.):

In dem linearen F^n-Systeme p^{ter} Stufe giebt es im Allgemeinen *eine* Fläche, welche durch p beliebige Punkte geht.

In dem linearen Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe giebt es im Allgemeinen *eine* Fläche, welche p beliebige Ebenen berührt.

Noch bezeichnender für diese linearen Flächen-Mannigfaltigkeiten ist der Doppelsatz:

Ein lineares F^n-System enthält alle Flächenbüschel, welche durch je zwei seiner Flächen bestimmt sind.

Ein lineares Φ^n-Gewebe enthält alle Flächenschaaren, welche durch je zwei seiner Flächen bestimmt sind.

Wenn nämlich die Coordinaten $\alpha_{qrst}^{(n)}$ und $\beta_{qrst}^{(n)}$ von irgend zwei F^n allen linearen Bedingungsgleichungen des F^n-Systemes genügen, so gilt dasselbe von den Coordinaten $\lambda_0\alpha_{qrst}^{(n)}+\lambda_1\beta_{qrst}^{(n)}$ einer beliebigen dritten F^n, welche mit den beiden ersteren in einem F^n-Büschel liegt. Ebenso wird bewiesen, dass ein lineares F^n-System alle F^n-Bündel und F^n-Gebüsche enthält, welchen

irgend drei resp. vier linear unabhängige von seinen Flächen angehören. Die reciproken Sätze sind Verallgemeinerungen des Satzes, dass eine Ebene alle Geraden enthält, welche durch je zwei ihrer Punkte bestimmt sind. — Lineare F^n-Systeme, welche mehr als eine F^n mit einander gemein haben, durchdringen sich allemal in einem *linearen* F^n-Systeme.

19. Zwei lineare F^n-Systeme k^{ter} und l^{ter} Stufe haben im Allgemeinen ein lineares F^n-System $k+l-N(n)^{\text{ter}}$ Stufe oder gar keine Flächen mit einander gemein, je nachdem $k+l \geqq N(n)$ oder $k+l < N(n)$ ist; wenn sie ein F^n-System von mehr als $k+l-N(n)$ Dimensionen oder im letzteren Falle auch nur eine Fläche mit einander gemein haben, so sind sie nicht von einander unabhängig, wie leicht einzusehen. Bilden ihre gemeinschaftlichen Flächen ein F^n-System m^{ter} Stufe, so können die beiden Systeme durch ein lineares F^n-System $k+l-m^{\text{ter}}$ Stufe verbunden werden; und zwar ist $m = -1$ oder 0 zu setzen, wenn sie keine resp. eine gemeinschaftliche Fläche besitzen. Die Gleichungen der beiden Systeme können nämlich auf die Form gebracht werden (15., 16.):

$$\lambda_0 F_0^n + \lambda_1 F_1^n + \cdots + \lambda_m F_m^n + \lambda_{m+1} F_{m+1}^n + \cdots + \lambda_k F_k^n = 0$$

und

$$\mu_0 F_0^n + \mu_1 F_1^n + \cdots + \mu_m F_m^n + \mu_{m+1} G_{m+1}^n + \cdots + \mu_l G_l^n = 0;$$

durch Addition dieser Gleichungen aber erhält man diejenige des verbindenden Systemes, welches demnach durch die $k+1$ Flächen F_i^n und die $l-m$ Flächen G_i^n, die sämmtlich von einander linear unabhängig sind, bestimmt wird. — Ebenso leicht beweist man den Satz: „Zwei lineare F^n-Systeme k^{ter} und l^{ter} Stufe, welche einem linearen System $k+l-m^{\text{ter}}$ Stufe angehören, haben ein F^n-System von mindestens m Dimensionen mit einander gemein".

20. Die Parameter von zwei linearen F^n-Systemen k^{ter} und l^{ter} Stufe müssen, wenn $k+l < N(n)$ ist, nicht weniger als $N(n)-k-l$ Bedingungen genügen, damit die Systeme eine Fläche mit einander gemein haben, z. B. diejenigen von zwei F^2-Büscheln sieben, von zwei F^2-Bündeln fünf Bedingungen. Dieses ergiebt sich ohne Schwierigkeit aus der ersten Definition der linearen F^n-Systeme.

Es giebt, wenn $k > l$ ist, $(k-l).(N(n)-k)$-fach unendlich viele lineare F^n-Systeme (oder Φ^n-Gewebe) k^{ter} Stufe, welche durch ein gegebenes lineares F^n-System (resp. Φ^n-Gewebe) l^{ter} Stufe gehen, d. h. alle Flächen desselben enthalten. Nämlich den $N(n)-k$ linearen Bedingungsgleichungen eines be-

liebigen dieser Systeme k^{ter} Stufe müssen die Coordinaten aller Flächen genügen, die dem Systeme l^{ter} Stufe angehören. Eliminirt man also aus jeder dieser Gleichungen bestimmte $N(n)-l$ der Coordinaten $\xi^{(n)}$ mit Hülfe der Bedingungsgleichungen des Systemes l^{ter} Stufe, so erhält man $N(n)-k$ andere Gleichungen, die für alle Werthe der übrigen $l+1$ Coordinaten identisch erfüllt sein müssen. Dieselben zerfallen folglich in je $l+1$ Gleichungen, welche bezüglich der Parameter beider Systeme (14.) vom ersten Grade sind, und die $(k+1)(N(n)-k)$ Parameter des Systemes k^{ter} Stufe müssen demnach $(l+1)(N(n)-k)$ Bedingungsgleichungen genügen, sodass nur noch $(k-l)(N(n)-k)$ derselben willkürlich annehmbar sind. Zugleich ergiebt sich: ***Ein lineares F^n-System k^{ter} Stufe enthält, wenn $k>l$ ist, $(k-l).(l+1)$-fach unendlich viele lineare F^n-Systeme l^{ter} Stufe.***

Z. B. ein F^n-Bündel enthält zweifach und ein F^n-Gebüsch vierfach unendlich viele F^n-Büschel; durch einen gegebenen F^2-Büschel gehen siebenfach unendlich viele F^2-Bündel, und die 21 Parameter eines jeden derselben müssen vierzehn linearen Bedingungsgleichungen genügen.

Ein lineares F^n-System k^{ter} Stufe kann so durch ein lineares F^n-System l^{ter} Stufe gelegt werden, dass es noch $k-l$ beliebig ausserhalb des letzteren angenommene F^n enthält (16., 19.).

§. 4. Die linearen F^n-Systeme $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe und die Polarentheorie der Fläche n^{ter} Classe.

21. Bei der eingehenden Untersuchung der linearen F^n-Systeme und Φ^n-Gewebe kann man entweder von der zweiten oder von unserer ersten Definition derselben ausgehen und demgemäss entweder mit den F^n-Büscheln und Φ^n-Schaaren oder mit den F^n-Systemen und Φ^n-Geweben $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe den Anfang machen. Bisher war das Erstere üblich; wir ziehen das Letztere entschieden vor, und können uns dabei auf die analytische Geometrie des Raumes von drei Dimensionen berufen, welche auch die Theorien der Ebenen und der krummen Flächen denjenigen der Geraden und Raumcurven vorausschickt.

Ein lineares F^n-System $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe ist bestimmt durch *eine* lineare homogene Gleichung zwischen den F^n-Coordinaten $\xi^{(n)}$. Wir schreiben diese Gleichung:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{q,r,s,t} \frac{n!}{q!\,r!\,s!\,t!}\cdot a^{(n)}_{qrst}.\xi^{(n)}_{qrst} = 0, \quad \text{worin} \quad q+r+s+t=n$$

ist, und die Coefficienten $a^{(n)}$ gegebene Constanten bezeichnen. Wird

$$\xi^{(n)}_{qrst} = \xi_1^q \xi_2^r \xi_3^s \xi_4^t$$

gesetzt, so geht diese Gleichung über in diejenige einer Fläche n^{ter} Classe, Φ^n, welche die Constanten $a^{(n)}$ zu Coordinaten hat; und zu dieser Φ^n ist jede beliebige F^n apolar, deren Coordinaten der obigen Gleichung genügen (vgl. 4.). Da ausserdem, wenn Φ^n gegeben ist, die Coordinaten $a^{(n)}$ dieser Fläche abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor bekannt sind, so gilt der Satz*):

Ein lineares F^n-System von $N(n)-1$ Dimensionen enthält doppelt unendlich viele Flächen, welche sich auf je eine n-fache Ebene reduciren. Der geometrische Ort aller dieser Ebenen ist eine Fläche n^{ter} Classe, welche auch auf alle übrigen Flächen des Systemes sich stützt, und durch welche das lineare F^n-System völlig bestimmt ist.

Ein lineares Φ^n-Gewebe von $N(n)-1$ Dimensionen enthält doppelt unendlich viele Flächen, welche sich auf je einen n-fachen Punkt reduciren. Der geometrische Ort aller dieser Punkte ist eine Fläche n^{ter} Ordnung, welche auch alle übrigen Flächen des Gewebes trägt, und durch welche das lineare Φ^n-Gewebe völlig bestimmt ist.

Durch diesen Doppelsatz ist die Theorie der Flächen n^{ter} Classe oder n^{ter} Ordnung in den innigsten Zusammenhang gebracht mit derjenigen der linearen F^n-Systeme resp. Φ^n-Gewebe $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe, vor Allem ihre Polarentheorie.

22. Die Polare einer F^k bezüglich einer Φ^n ist, wenn $n > k$, der geometrische Ort einer $n-k$-fachen Ebene, welche mit F^k zusammen eine zu Φ^n apolare F^n bildet**). Nun sind aber die Coordinaten $\xi^{(n)}$ einer F^n, welche in eine gegebene F^k und irgend eine F^{n-k} zerfällt, lineare Functionen von den Coordinaten der letzteren; und durch Einsetzung derselben in die Gleichung des linearen F^n-Systemes, welches (21.) von allen zu Φ^n apolaren F^n gebildet wird, erhält man eine lineare homogene Gleichung für die Coordinaten $\xi^{(n-k)}$ der F^{n-k}. Ist diese Gleichung für alle Werthe der $\xi^{(n-k)}$ identisch erfüllt, so ist F^k apolar zu Φ^n und stützt die Φ^n; im Allgemeinen aber tritt dieser Fall nicht ein. Wenn also F^{n-k} sich auf eine $n-k$-fache Ebene reducirt, so enthält die Gleichung die Coordinaten dieser Ebene im

*) Für Kegelschnittsysteme hat bereits Herr *Rosanes* einen analogen Satz bewiesen a. a. O. S. 270.

**) Dieses Journal Bd. 78, S. 102 und Bd. 79, S. 163.

Allgemeinen in der $n-k^{\text{ten}}$ Dimension und repräsentirt eine Φ^{n-k}, nämlich die Polare von F^k in Bezug auf Φ^n. Besteht F^k aus k Ebenen, so ist Φ^{n-k} die Polare dieser Ebenengruppe; und fallen diese k Ebenen mit einer Ebene F^1 zusammen, so ist Φ^{n-k} die Polare der k-fachen Ebene F^1, oder wie man gewöhnlich sich ausdrückt, „die k^{te} Polare von F^1 in Bezug auf Φ^n." — Auf dieselbe Art können aus der Gleichung des Φ^n-Gewebes $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe, welches auf eine gegebene F^n sich stützt, die Gleichungen der Polaren aller Punkte, Punktgruppen und Flächen k^{ter} Classe bezüglich der F^n abgeleitet werden.

23. Die Resultate der soeben angedeuteten Rechnungen finden sich bereits in einer früheren Arbeit*). Hier sei nur Folgendes bemerkt: Wenn die symbolischen Gleichungen:

$$(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\alpha_4 x_4)^k = 0 \quad \text{und} \quad (a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\xi_4)^n = 0$$

eine F^k und eine Φ^n repräsentiren und $n>k$ ist, so wird die Polare der F^k in Bezug auf Φ^n symbolisch durch die Gleichung:

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)^k.(a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\xi_4)^{n-k} = 0$$

dargestellt**). Und wenn diese Gleichung für alle Werthe der Ebenen-Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 identisch erfüllt ist, so stützt sich Φ^n auf F^k.

24. Zu einem linearen F^n-Systeme $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe können wir, wenn $n>k$ ist, auch jede F^k rechnen, welche zu der das System bestimmenden Φ^n apolar ist, also die Φ^n stützt; eine solche F^k bildet (22.) mit *jeder beliebigen* F^{n-k} des Raumes eine F^n, welche dem Systeme angehört. Die Coordinaten dieser F^k müssen, wie auch aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, $N(n-k)+1$ linearen Bedingungsgleichungen genügen, deren Coefficienten ganze Vielfache von den Coordinaten der Φ^n sind. Also:

Ein lineares F^n-System $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe enthält, wenn $\frac{n}{2}<k<n$ ist, ein lineares F^k-System $N(k)-N(n-k)-1^{\text{ter}}$ oder höherer Stufe.

Ein lineares Φ^n-Gewebe $N(n)-1^{\text{ter}}$ Stufe enthält, wenn $\frac{n}{2}<k<n$ ist, ein lineares Φ^k-Gewebe $N(k)-N(n-k)-1^{\text{ter}}$ oder höherer Stufe.

Dieses lineare F^k-System ist, wie schon früher (a. a. O. Bd. 78, S. 109) nachgewiesen wurde, ein sehr specielles. Nur dann ist es von mehr als $N(k)-N(n-k)-1$ Dimensionen, wenn das lineare F^n-System ein specielles

*) Dieses Journal Bd. 78, S. 103.

**) Vgl. die Formeln in diesem Journal Bd. 79, S. 166.

ist; derartige besondere F^n-Systeme können auch Flächen enthalten, deren Ordnung $\leqq \frac{n}{2}$ ist.

Beispielsweise sei erwähnt, dass das Φ^3-Gewebe, welches auf die allgemeine Fläche dritter Ordnung F^3 sich stützt, ein lineares Φ^2-Gewebe fünfter Stufe enthält. Von diesen auf F^3 ruhenden Φ^2 zerfallen doppelt unendlich viele in Punktenpaare, welche sämmtlich auf der Kernfläche der F^3 liegen und aus je zwei reciproken Polen bezüglich der F^3 bestehen.

25. Da alle Φ^n, welche auf eine gegebene F^n sich stützen, ein *lineares* Φ^n-Gewebe bilden, so bestimmen p beliebige unter ihnen ein lineares Φ^n-Gewebe $p-1^{\text{ter}}$ Stufe, dessen sämmtliche Flächen auf F^n sich stützen. Nun besteht aber ein lineares F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe aus allen F^n, auf welchen p gegebene, linear unabhängige Φ^n ruhen; auf jede dieser F^n stützen sich folglich alle Flächen des durch jene p bestimmten linearen Φ^n-Gewebes $p-1^{\text{ter}}$ Stufe. Wir können deshalb sagen:

Ein lineares F^n-System $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe trägt ein lineares Φ^n-Gewebe $p-1^{\text{ter}}$ Stufe,

Ein lineares Φ^n-Gewebe $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe ruht auf einem linearen F^n-Systeme $p-1^{\text{ter}}$ Stufe,

d. h. jede F^n des Systemes ist apolar zu jeder Φ^n des Gewebes. Das Φ^n-Gewebe ist durch das F^n-System bestimmt, und ebenso dieses durch jenes. Zu beachten ist, dass die Stufenzahlen beider die Summe $N(n)-1$ geben.

26. Ein F^n-Büschel z. B. trägt ein lineares Φ^n-Gewebe $N(n)-2^{\text{ter}}$ Stufe; letzteres enthält unendlich viele Φ^n, welche sich auf je einen (n-fachen) Punkt reduciren, und der geometrische Ort dieses Punktes ist die Knotenlinie $C^{n.n}$ des F^n-Büschels. Ein F^n-Bündel trägt ein lineares Φ^n-Gewebe $N(n)-3^{\text{ter}}$ Stufe, und auf jeden Knotenpunkt des Bündels reducirt sich eine Φ^n des Gewebes. Umgekehrt giebt es in einem linearen F^2-Systeme sechster Stufe im Allgemeinen acht Flächen, die sich auf je eine einzige Ebene reduciren; diese acht Ebenen stützen (d. h. berühren) die auf dem System ruhende Schaarschaar von Flächen zweiter Classe.

Die Polaren aller Φ^{n-k} des Raumes bezüglich einer F^n bilden ein lineares F^k-System $N(n-k)^{\text{ter}}$ Stufe, wenn $\frac{n}{2}<k<n$ ist; auf dieses aber stützt sich (20.) ein lineares Φ^k-Gewebe von $N(k)-N(n-k)-1$ Dimensionen. Das letztere besteht aus allen zu F^n apolaren Φ^k; denn jede Φ^k des Gewebes bildet mit jeder beliebigen Φ^{n-k} zusammen eine auf F^n ruhende Φ^n, weil sie auf die Polare von Φ^{n-k} sich stützt. Z. B. das lineare Φ^2-Gewebe

fünfter Stufe, welches (24.) auf der allgemeinen kubischen Fläche F^3 ruht, stützt sich zugleich auf das F^2-Gebüsch, welches aus den ersten Polaren aller Punkte des Raumes bezüglich der F^3 besteht. Und je zwei Punkte, auf welche eine Φ^2 des Gewebes sich reducirt, sind folglich einander conjugirt hinsichtlich aller dieser ersten Polaren.

§. 5. Lineare Transformationen von F^n-Systemen und Φ^n-Geweben.

27. Den collinearen und den reciproken Transformationen des Raumes von drei Dimensionen stehen analoge Transformationen des F^n-Systemes und des Φ^n-Gewebes von $N(n)$ Dimensionen zur Seite. Man erhält dieselben, wenn man statt der F^n-Coordinaten $\xi^{(n)}_{qrst}$ durch eine lineare Substitution entweder andere F^n-Coordinaten $\eta^{(n)}_{qrst}$ oder Φ^n-Coordinaten $y^{(n)}_{qrst}$ einführt.

Wir denken uns zwei Räume R_x und R_y bezogen auf zwei tetraëdrische oder auch Cartesianische Coordinatensysteme, und bezeichnen mit $\xi^{(n)}$ oder $x^{(n)}$ die homogenen Coordinaten einer beliebigen F^n resp. Φ^n von R_x, dagegen mit $\eta^{(n)}$ oder $y^{(n)}$ diejenigen einer F^n resp. Φ^n von R_y. Setzen wir nun jede der $N(n)+1$ Coordinaten $\xi^{(n)}$ einer beliebigen linearen und homogenen Function der $y^{(n)}$ gleich, so erhalten wir eine lineare Substitution, durch welche jeder Φ^n von R_y eine F^n von R_x zugewiesen wird, indem sich die Coordinaten der letzteren Fläche eindeutig aus denjenigen der ersteren berechnen lassen. Wir wollen annehmen, dass die Determinante der Substitution von Null verschieden ist; dann entspricht auch umgekehrt jeder F^n von R_x *eine* Φ^n des Raumes R_y, und die *inverse* Substitution stellt die Coordinaten $y^{(n)}$ der letzteren als lineare homogene Functionen der Coordinaten $\xi^{(n)}$ von F^n dar. Das F^n-System $N(n)^{\text{ter}}$ Stufe des Raumes R_x wird (um uns kurz auszudrücken) durch die lineare Substitution in das Φ^n-Gewebe $N(n)^{\text{ter}}$ Stufe von R_y *transformirt*, und wir nennen diese Transformation eine *reciproke*.

28. Da jede homogene Gleichung g_i^{ten} Grades zwischen den $\xi^{(n)}$ sich durch die lineare Substitution in eine homogene Gleichung g_i^{ten} Grades für die $y^{(n)}$ verwandelt, so folgt ohne Weiteres:

Durch die reciproke Transformation des F^n-Systemes $N(n)^{ter}$ Stufe R_x wird nicht nur jeder F^n desselben eine Φ^n, sondern auch jedem F^n-Systeme p^{ter} Stufe g^{ten} Grades ein Φ^n-Gewebe p^{ter} Stufe g^{ten} Grades in R_y zugewiesen.

Insbesondere entspricht also jedem linearen F^n-Systeme von R_x ein *lineares* Φ^n-Gewebe gleicher Stufe im Raume R_y, und umgekehrt.

Ein lineares F^n-System $N(n)-1^{ter}$ Stufe von R_x stützt aber (21.) eine Fläche n^{ter} Classe, und das ihm entsprechende Φ^n-Gewebe $N(n)-1^{ter}$ Stufe von R_y ruht auf einer Fläche n^{ter} Ordnung; und man findet leicht, dass die Coordinaten $\eta^{(n)}$ dieser F^n lineare homogene Functionen der Coordinaten $x^{(n)}$ jener Φ^n sind, und in die $x^{(n)}$ übergehen durch eine lineare Substitution, welche abgesehen von Binomialcoefficienten aus der ursprünglichen *durch Transposition* *) entsteht. Also:

Durch die reciproke Transformation des F^n-Systemes $N(n)^{ter}$ Stufe von R_x wird indirect auch jeder Φ^n des Raumes R_x eine F^n von R_y zugewiesen, und jedem Φ^n-Gewebe von R_x ein F^n-System von derselben Stufe und gleichem Grade in R_y.

Da eine beliebige F^n zu jedem der Räume R_x und R_y gerechnet werden kann, so entsprechen ihr also zwei Φ^n, eine in R_y und eine in R_x; dieselben sind im Allgemeinen nicht identisch.

29. Die lineare Substitution besteht aus $N(n)+1$ Gleichungen (27.), von denen jede $N(n)+1$ Substitutionscoefficienten enthalten kann; die Gesammtzahl ihrer willkürlichen Coefficienten ist demnach $(N(n)+1).(N(n)+1)$. Für die reciproke Transformation sind aber nur die $N(n).(N(n)+2)$ unabhängigen Verhältnisse dieser Coefficienten von Belang, weil es bei der Bestimmung einer F^n oder Φ^n auch nur auf die Verhältnisse und nicht auf die Werthe ihrer Coordinaten ankommt. Für die Verhältnisse der Substitutions-Coefficienten erhält man nun $N(n)$ lineare Gleichungen, wenn von irgend einer F^n des einen Raumes die entsprechende Φ^n des anderen gegeben ist; und daraus folgt:

Die reciproke Transformation des F^n-Systemes $N(n)^{ter}$ Stufe ist völlig bestimmt, wenn man $N(n)+2$ beliebigen F^n desselben ebenso viele Φ^n als resp. entsprechende willkürlich zuweist; doch müssen jene F^n und diese Φ^n so angenommen werden, dass keine $N(n)+1$ derselben einem linearen F^n-Systeme resp. Φ^n-Gewebe $N(n)-1^{ter}$ Stufe angehören.

---

*) *Gauss* gebraucht in art. 268 der „Disquisitiones arithmeticae" diesen Ausdruck von den Substitutionen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1\eta_1+\beta_1\eta_2+\gamma_1\eta_3 \\ x_2 &= \alpha_2\eta_1+\beta_2\eta_2+\gamma_2\eta_3 \\ x_3 &= \alpha_3\eta_1+\beta_3\eta_2+\gamma_3\eta_3 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} y_1 &= \alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3 \\ y_2 &= \beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3 \\ y_3 &= \gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3. \end{aligned}$$

Diese Einschränkung ist nöthig, weil sonst die Bedingungsgleichungen nicht ausreichen zur Bestimmung der $N(n).(N(n)+2)$ Verhältnisse der Substitutions-Coefficienten.

Diese Coefficienten können z. B. so bestimmt werden, dass beliebigen $N(n)+2$ Flächen n^{ter} Ordnung von R_x irgend $N(n)+2$ (n-fache) Punkte von R_y beziehungsweise entsprechen; doch dürfen keine $N(n)+1$ dieser Punkte auf einer F^n liegen.

30. Den Beweis der folgenden Sätze überlassen wir dem Leser.

Die reciproke Transformation des F^n-Systemes $N(n)^{ter}$ Stufe weist jedem F^n-Büschel eine zu ihm *projectivische* Φ^n-Schaar zu, und kann deshalb eine „projectivische" genannt werden. Ein lineares F^n-System p^{ter} Stufe und das ihm entsprechende lineare Φ^n-Gewebe können durch die beiden Gleichungen:

$$\lambda_0 F_0^n + \lambda_1 F_1^n + \cdots + \lambda_p F_p^n = 0,$$

und

$$\lambda_0 \Phi_0^n + \lambda_1 \Phi_1^n + \cdots + \lambda_p \Phi_p^n = 0$$

auf solche Art dargestellt werden, dass letztere für jedes Werthensystem der Parameter λ zwei einander entsprechende Flächen repräsentiren.

Es kann der Fall eintreten, dass jede beliebige F^n zu der ihr entsprechenden Φ^n apolar ist; im Allgemeinen aber bilden alle F^n, welche die ihnen entsprechenden Φ^n stützen, ein quadratisches F^n-System $N(n)-1^{ter}$ Stufe. Der geometrische Ort aller n-fachen Ebenen, welche die ihnen entsprechenden Φ^n berühren, ist deshalb im Allgemeinen eine Φ^{2n}, und ebenso ist der Ort aller n-fachen Punkte, die auf ihren entsprechenden F^n liegen, im Allgemeinen eine F^{2n}.

Weist man jeder F^n des Raumes ihre Polare bezüglich einer gegebenen Φ^{2n} als entsprechende Φ^n zu, so ist das F^n-System $N(n)^{ter}$ Stufe auf eine specielle Art reciprok transformirt. Diese Transformation führt zu einer durch Φ^{2n} bestimmten F^{2n}, welche alle auf ihren entsprechenden F^n liegenden n-fachen Punkte enthält. Die Φ^{2n} und die F^{2n} stehen in einer sehr bemerkenswerthen Beziehung zu einander; für $n=1$ insbesondere sind sie identisch.

Der Strahlencomplex n^{ten} Grades charakterisirt eine sehr specielle reciproke Transformation, bei welcher jeder n-fachen Ebene eine in ihr liegende Curve n^{ter} Classe und jedem n-fachen Punkte eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung entspricht, die den Punkt zum Mittelpunkt hat.

31. Eine ***collineare Transformation*** des F^n-Systemes $N(n)^{ter}$ Stufe erhalten wir, wenn wir die F^n-Coordinaten $\xi^{(n)}$ durch eine lineare Substitution in andere F^n-Coordinaten $\eta^{(n)}$ überführen, und zwar nennen wir dieselbe deshalb ***collinear,*** weil sie nicht nur jeder F^n von R_x eine F^n von R_y zuweist, sondern auch jedem linearen F^n-Systeme von R_x ein ***lineares*** F^n-System gleicher Stufe von R_y. Die collineare Transformation wird durch den folgenden Satz, dessen Beweis auf der Hand liegt, auf die reciproke zurückgeführt:

Wenn zwei F^n-Systeme R_x und R_y auf ein Φ^n-Gewebe R_z reciprok bezogen sind, so sind sie dadurch auf einander collinear bezogen.

Die collineare Transformation des F^n-Systemes $N(n)^{ter}$ Stufe R_x ist demnach völlig bestimmt, wenn $N(n)+2$ beliebigen F^n desselben ebenso viele F^n von R_y als resp. entsprechende willkürlich zugewiesen werden (29.); weshalb auch im Allgemeinen höchstens $N(n)+1$ Flächen von R_x mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Die collineare Transformation ist ähnlich wie die reciproke eine ***projectivische;*** jedes F^n-System p^{ter} Stufe g^{ten} Grades geht durch sie über in ein F^n-System p^{ter} Stufe g^{ten} Grades; indirect wird durch sie auch jeder Φ^n des Raumes R_x eine Φ^n von R_y zugewiesen (28.). Durch passende Annahme der Substitutions-Coefficienten kann man bewirken, dass einem linearen F^n-System p^{ter} Stufe die Gesammtheit aller durch $N(n)-p$ beliebige Punkte gehenden F^n entspricht.

Strassburg i. E. 23. Februar 1876.

Druckfehler.

Auf pag. 16 Zeile 4 von unten lies „(25.)“ statt „(20.)“.

Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung.

(Von Herrn *G. Erdmann.*)

Es sei die Aufgabe vorgelegt, das Integral

$$V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi(x, y, y')\,dx,$$

wo $y' = \frac{dy}{dx}$, zu einem Maximum oder Minimum zu machen. Dann wird man vermittelst der gewöhnlichen Methode der Variationsrechnung nur einen solchen Ausdruck für y erhalten, dessen Differentialquotient zwischen den angegebenen Grenzen stetig ist. Wenn nun in Wirklichkeit V ein Maximum oder Minimum für eine solche Function y von x wird, dass die Curve, deren Ordinaten dieselbe darstellen, zwischen ξ_0 und ξ_1 Ecken hat, so wird man mittelst der gewöhnlichen Methode, da in derselben der zweite Differentialquotient von y in Anwendung kommt, diese Lösung nicht finden. — Herr *Todhunter* hat in seiner Schrift: Researches in the calculus of variations, principally in the theory of discontinuous solutions, London 1871, verschiedene derartige Fälle behandelt, ohne jedoch eine allgemeine Lösung des Problems zu geben, welche ich hier auseinanderzusetzen beabsichtige.

I.

Ableitung der allgemeinen Regel.

Es sei die Aufgabe gegeben, V zu einem Maximum oder Minimum zu machen, mit der Bestimmung, dass die Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten y sind, zwischen ξ_0 und ξ_1 n Ecken haben solle. Die zu bestimmenden Abscissen dieser Eckpunkte seien $x_1, x_2, \ldots x_n$; demgemäss setze ich $\xi_0 = x_0$ und $\xi_1 = x_{n+1}$. Bezeichne ich y zwischen den Werthen x_k und x_{k+1} von x mit y_k, so sind sämmtliche y_k Functionen von x, deren Differentialquotienten stetig sind; und ich habe

$$(1.)\quad V = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x, y_k, y_k')\,dx.$$

Die Werthe, welche y_k und y_k' für $x = x_k$ und $x = x_{k+1}$ annehmen, bezeichne ich mit y_{k0}, y_{k0}' und y_{k1}, y_{k1}'. Hierbei ist $y_{k+1,0}$ immer gleich y_{k1}, dagegen ist $y_{k+1,0}'$ verschieden von y_{k1}'. —

Jetzt ergiebt die Variation der Gleichung (1.) nach den bekannten Regeln, wenn ich $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y,y')$ mit $\varphi'(y)$ und $\frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x,y,y')$ mit $\varphi'(y')$ bezeichne:

$$(2.)\quad \begin{cases} \delta V = \sum_{k=0}^{k=n}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[\varphi'(y_k)-\frac{d}{dx}\varphi'(y'_k)]\,dx \\ \quad +\sum_{k=0}^{k=n}[-\varphi'(y'_{k0})\delta y_{k0}+\varphi'(y'_{k1})\delta y'_{k1}] \\ \quad +\sum_{k=0}^{k=n}[-\varphi(x_k, y_{k0}, y'_{k0})\delta x_k+\varphi(x_{k+1}, y_{k1}, y'_{k1})\delta x_{k+1}]. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck muss für alle Werthe, welche die in ihm enthaltenen Variationen der x und y annehmen können, verschwinden. Zunächst sieht man, dass zu diesem Zwecke der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck für jeden Werth von k verschwinden muss; es muss also für jedes y die Differentialgleichung bestehen

$$\varphi'(y)-\frac{d}{dx}\varphi'(y') = 0.$$

Bezeichnen $[\delta y_{k1}]$ und $[\delta y_{k+1,0}]$ die vollständigen Variationen von y_{k1} und $y_{k+1,0}$, das heisst, diejenigen Variationen, welche entstehen, wenn auch x_{k+1} variirt, so habe ich:

$$(3.)\quad [\delta y_{k1}] = \delta y_{k1}+y'_{k1}\delta x_{k+1}$$

und ebenso

$$(4.)\quad [\delta y_{k+1,0}] = \delta y_{k+1,0}+y'_{k+1,0}\delta x_{k+1}.$$

$[\delta y_{k1}]$ muss gleich $[\delta y_{k+1,0}]$ sein; also ist

$$\delta y_{k1} = [\delta y_{k1}]-y'_{k1}\delta x_{k+1},$$
$$\delta y_{k+1,0} = [\delta y_{k1}]-y'_{k+1,0}\delta x_{k+1}.$$

Indem ich diese Werthe in (2.) einsetze und berücksichtige, dass $[\delta y_{k1}]$ ebenso wie δx_{k+1} vollständig willkürlich ist, ergiebt sich, dass, wenn δV verschwinden soll, folgende Gleichungen bestehen müssen:

$$(5.)\quad \varphi'(y'_{k1}) = \varphi'(y'_{k+1,0}),$$

$$(6.)\quad \varphi(x_{k+1}, y_{k1}, y'_{k1})-y'_{k1}\varphi'(y'_{k1}) = \varphi(x_{k+1}, y_{k+1,0}, y'_{k+1,0})-y'_{k+1,0}\varphi'(y'_{k+1,0}),$$

zu welchen für den Fall, dass die Grenzwerthe y_{00} und y_{n1} nicht gegeben sind, noch die Gleichungen

$$\varphi'(y'_{00}) = 0,\quad \varphi'(y'_{n1}) = 0$$

hinzukommen.

Wir haben also den Lehrsatz: Wenn ξ und η die Coordinaten eines Eckpunktes bezeichnen, so muss die Function $\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p)$ für zwei gewisse verschiedene Werthe von p denselben Werth annehmen; das Nämliche muss bei der Function $\varphi(\xi,\eta,p)-p\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p)$ für dieselben Werthe von p stattfinden. —

Die Art, wie dieser Lehrsatz zur Bestimmung der betreffenden Eckpunkte anzuwenden ist, werde ich an einigen Beispielen zeigen.

II.

Beispiele, in denen die Function $\varphi(x,y,y')$ nur y' enthält.

Es sei zunächst

$$V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sin(y')\,dx.$$

Das Integral muss sowohl ein Maximum als auch ein Minimum haben, da es nicht grösser als $\xi_1-\xi_0$ und nicht kleiner als $-\xi_1+\xi_0$ werden kann. Die gewöhnliche Methode liefert die Lösung

$$y = Cx+C',$$

also die die gegebenen Endpunkte verbindende gerade Linie. Diese eine Lösung kann nicht genügen; wir müssen also zu der Annahme unsere Zuflucht nehmen, dass y' unstetig werden könne. Für einen Punkt, in welchem dies der Fall ist, müssen die Functionen

$$\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p) = \cos p$$

und

$$\varphi(\xi,\eta,p)-p\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p) = \sin p - p\cos p$$

für verschiedene Werthe von p dieselben Werthe annehmen können. Bezeichne ich die Werthe von p mit p_1 und p_2, so habe ich demnach die Gleichungen

$$(7.)\qquad \cos p_1 = \cos p_2$$

$$(8.)\qquad \sin p_1 - p_1\cos p_1 = \sin p_2 - p_2\cos p_2.$$

Man sieht aus (7.), dass p_2 entweder gleich $2h\pi+p_1$ oder gleich $2h\pi-p_1$ sein muss. Im ersten Falle folgt aus (8.), dass p_1 und p_2 entweder beide von der Form $\frac{(4n-1)\pi}{2}$ oder beide von der Form $\frac{(4n+1)\pi}{2}$ sein müssen.

Es können nur gerade Linien sein, aus denen sich die gesuchte Curve zusammensetzt; bei diesen ist y' constant und zwar gleich der Tangente des Winkels, den sie mit der x-Axe bilden. Diese Tangente muss also entweder bei jeder geraden Linie von der Form $\frac{(4n-1)\pi}{2}$ sein, wo n für die verschiedenen Linien verschiedene Werthe annimmt; oder sie muss bei jeder Linie die Form $\frac{(4n+1)\pi}{2}$ haben. Im ersten Falle findet ein Minimum, im zweiten ein Maximum statt, denn $\varphi''(y', y')$ oder $-\sin y'$ ist im ersten Falle durchweg positiv, im zweiten durchweg negativ, was bei Problemen, in denen unter dem Integralzeichen nur y' vorkommt, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die zweite Variation nur positive resp. nur negative Werthe annehmen kann.

Wenn wir $p_2 = 2h\pi - p_1$ setzen, so folgt aus (8.) $\operatorname{tg} p_1 = p_1 - h\pi$. Aber die Lösungen dieser Gleichung entsprechen weder einem Maximum noch einem Minimum, da $\varphi''(y', y')$ beim Uebergang von einer Geraden zur anderen sein Zeichen wechseln würde, indem $\sin p_2 = -\sin p_1$ wäre.*)

Wir gehen jetzt zu folgendem Problem über:

$$(9.)\qquad V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} [y'^4 + ay'^3 + by'^2 + cy']\,dx.$$

Ich setze hier

$$(10.)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi, \eta, p) = 4p^3 + 3ap^2 + 2bp + c = N,$$

$$(11.)\qquad \varphi(\xi, \eta, p) - p\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi, \eta, p) = -3p^4 - 2ap^3 - bp^2 = M.$$

Es sind M und N so zu bestimmen, dass die Gleichungen (10.) und (11.) zwei Wurzeln mit einander gemein haben. Um diese algebraische Rechnung möglichst einfach auszuführen, substituire ich $p = u - \frac{a}{4}$; dann gehen

---

*) Hr. *Todhunter* behandelt im ersten Capitel des genannten Werkes solche Fälle, in denen $\varphi(x, y, y')$ nur y' enthält. Dass jedoch sein Resultat, nach welchem die verschiedenen geraden Linien den Wurzeln der Gleichung $\varphi'(p) = 0$ entsprechen müssen, nicht richtig ist, geht schon aus folgender Betrachtung hervor. Wenn

$$V = \int_{\xi_1}^{\xi_1} \varphi(x, y, y')\,dx \quad \text{und} \quad V_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} [\varphi(x, y, y') + y']\,dx$$

gesetzt wird, so sind bei gegebenen Grenzwerthen von y die Aufgaben, V und V_1 zu einem Maximum oder Minimum zu machen, identisch, da V und V_1 sich nur um eine constante Differenz unterscheiden. Nach der *Todhunter*schen Methode würde jedoch das eine Problem auf die Gleichung $\varphi'(p) = 0$ und das andere auf $\varphi'(p) + 1 = 0$ führen.

die Gleichungen (10.) und (11.) über in

$$(12.)\qquad 4u^3+\left(2b-\frac{3a^2}{4}\right)u = \nu,$$

$$(13.)\qquad 3u^4-au^3+\left(b-\frac{3a^2}{8}\right)u^2+\left(\frac{3a^3}{16}-\frac{ab}{2}\right)u = \mu-\tfrac{1}{4}a\nu,$$

wo μ und ν von u freie Ausdrücke bezeichnen. Setze ich

$$(14.)\qquad b-\frac{3a^2}{8} = \alpha,$$

so lassen sich die Gleichungen (12.) und (13.) schreiben:

$$(15.)\qquad 4u^3+2\alpha u = \nu,$$

$$(16.)\qquad 3u^4-au^3+\alpha u^2-\tfrac{1}{2}a\alpha u = \mu-\tfrac{1}{4}a\nu.$$

Es ergiebt sich aus den Gleichungen (15.) und (16.):

$$(17.)\qquad -2\alpha u^2+3\nu u = 4\mu,$$

$$(18.)\qquad \left(2\alpha^2+\frac{9\nu^2}{\alpha}-8\mu\right)u = \alpha\nu+\frac{12\mu\nu}{\alpha}.$$

Gleichung (18.) kann für zwei verschiedene Werthe von u nur dann stattfinden, wenn

$$(19.)\qquad 2\alpha^3+9\nu^2-8\alpha\mu = 0,$$

$$(20.)\qquad \alpha^2\nu+12\mu\nu = 0.$$

Aus den Gleichungen (19.), (20.) und (17.) ergeben sich folgende drei Werthsysteme für μ, ν und u:

$$\mu = \frac{\alpha^2}{4},\quad \nu = 0,\quad u = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mu = -\frac{\alpha^2}{12},\quad \nu = +\sqrt{-\frac{8\alpha^3}{27}},\quad u = +\sqrt{-\frac{\alpha}{6}};$$

$$\mu = -\frac{\alpha^2}{12},\quad \nu = -\sqrt{\frac{-8\alpha^3}{27}},\quad u = -\sqrt{-\frac{\alpha}{6}}.$$

Nur das erste dieser Werthsysteme giebt zwei verschiedene Werthe für u, kann also hier allein in Betracht kommen. Wir haben demnach

$$u = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{3a^2-8b},$$

und

$$(21.)\qquad p = \tfrac{1}{4}\left\{-a\pm\sqrt{3a^2-8b}\right\}.$$

Sind die Endpunkte der gesuchten Curve gegeben, so besteht dieselbe, analog dem ersten Beispiel, entweder aus der die Punkte verbindenden

geraden Linie, oder aus mehreren geraden Linien, die mit der x-Axe Winkel bilden, deren Tangenten abwechselnd gleich $-\frac{1}{4}\{a-\sqrt{3a^2-8b}\}$ und $-\frac{1}{4}\{a+\sqrt{3a^2-8b}\}$ sind.

Das Problem hat stets mindestens ein Minimum. Nun ist in unserem Beispiele

$$\varphi''(y', y') = 12y'^2+6ay'+2b.$$

Ist

$$3a^2-8b<0,$$

so ist $\varphi''(y', y')$ stets positiv. Die die Endpunkte verbindende gerade Linie giebt also ein Minimum. In eben diesem Falle wird die rechte Seite der Gleichung (21.) imaginär; es giebt somit kein anderes, unstetiges Minimum. Ist dagegen

$$3a^2-8b>0,$$

so wird es von der Lage der Endpunkte gegen einander abhängen, ob $\varphi''(y', y')$ positiv oder negativ ist. Bezeichne ich den Winkel, welchen die Verbindungslinie der Endpunkte mit der x-Axe bildet, mit γ, so wird $\varphi''(y', y')$ negativ sein, falls $tg\gamma$ zwischen $-\frac{1}{12}\{3a-\sqrt{3a^2-8b}\}$ und $-\frac{1}{12}\{3a+\sqrt{3a^2-8b}\}$ liegt. In diesem Falle würde also ein Maximum stattfinden. Da es nun ein Minimum jedenfalls auch geben muss, so kann dasselbe nur durch Zusammensetzung mehrerer gerader Linien von den oben berechneten Richtungen erhalten werden.

III.

Beispiel, in welchem $\varphi(x, y, y')$ ausser y' auch x und y enthält.

Ein drittes Beispiel ist folgendes. Es sei eine Rotationsoberfläche gegeben mit der Gleichung

$$(22.)\qquad z^2 = (x^2+y^2)^m.$$

Zwischen zwei gegebenen Punkten der xy-Ebene werde eine Curve gezogen. Diese Curve bewege sich in senkrechter Richtung zur xy-Ebene; es soll das Stück der von ihr beschriebenen Cylinderfläche, welches von der xy-Ebene und der Fläche (22.) begrenzt wird, ein Minimum werden. —

Es ist in unserem Falle

$$(23.)\qquad V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} (x^2+y^2)^{\frac{m}{2}} (1+y'^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Dies führt auf die Gleichung

$$(24.)\qquad \frac{m(y-xy')}{x^2+y^2} = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

Die Gleichung lässt sich direct integriren, und die resultirende Differentialgleichung erster Ordnung ergiebt nach nochmaliger Integration und Einführung von Polarcoordinaten

$$(25.)\qquad r^{m+1}(\alpha\cos(m+1)\varphi+\sin(m+1)\varphi) = c^{m+1},$$

wo α und c die Integrationsconstanten sind.

Die Gleichung (23.) zeigt, dass in unserem Falle

$$\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p) = (\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{p}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\varphi(\xi,\eta,p)-p\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p) = (\xi^2+\eta^2)^{\frac{m}{2}}\Big[(1+p^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{p^2}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\Big].$$

Die Function $\frac{\partial}{\partial p}\varphi(\xi,\eta,p)$ kann für zwei verschiedene Werthe von p denselben Werth nur dann annehmen, wenn $\xi = 0$ und $\eta = 0$, in welchem Falle jede der beiden Functionen für alle beliebigen Werthe von p denselben Werth Null annimmt. Nur der Coordinatenanfangspunkt kann somit ein Eckpunkt werden. Wenn dieser Punkt in der Curve (25.) liegen soll, muss die Constante c verschwinden. In diesem Falle sind es $m+1$ durch den Anfangspunkt gehende gerade Linien, die der Gleichung (25.) genügen. Ich werde also zunächst den einen gegebenen Endpunkt mit dem Anfangspunkt verbinden; da sich in diesem Punkte die Constante α ändern darf, so kann ich als Fortsetzung der Curve die Verbindung des Anfangspunktes mit dem zweiten gegebenen Endpunkt betrachten.

Für den Fall $m = 1$, in welchem die Gleichung (22.) die eines geraden Kegels wird, geht Gleichung (25.) über in die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist. Wenn nun der Winkel, den die von den Endpunkten nach dem Coordinatenanfangspunkt gezogenen Linien bilden, ein stumpfer ist, so giebt es keine Hyperbel der angegebenen Art, in deren einem Zweige die gegebenen Punkte liegen. Gleichwohl muss auch in diesem Falle ein Minimum existiren; dasselbe kann also nur entstehen, wenn man die Endpunkte mit dem Coordinatenanfangspunkt verbindet. —

IV.

Ueber Unstetigkeiten, die durch Bedingungen hervorgerufen werden.

Wir betrachten jetzt folgende Frage. In dem Integral

$$V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi(x, y, y')\,dx$$

werde statt y eine Function von x und z gesetzt, die ich mit $f(x, z)$ bezeichne. Es fragt sich: In welchem Verhältniss steht zu der Aufgabe, V zu einem Maximum oder Minimum zu machen, die Aufgabe, z so zu bestimmen, dass das Integral

$$W = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi[x, f(x, z), f'(x) + z'f'(z)]\,dx$$

zu einem Maximum oder Minimum wird.

Die letztere Aufgabe führt auf die Differentialgleichung

$$f'(z)[\varphi'(y) - \frac{d}{dx}\varphi'(y')] = 0,$$

wo für y zu setzen ist $f(x, z)$. Hieraus folgt, dass Werthe von y, die V zu einem Maximum oder Minimum machen, auch einem Maximum oder Minimum von W entsprechen, wenn die Werthe, die sich aus ihnen vermöge der Gleichung $y = f(x, z)$ für z ergeben, durchweg reell sind. Ausserdem aber würde die aufgestellte Differentialgleichung auch durch die Gleichung $f'(z) = 0$ erfüllt werden. Diese Gleichung kann zu unstetigen Lösungen verwandt werden. —

Für einen Eckpunkt müssen nach den hier entwickelten Regeln die Ausdrücke

$$(26.)\qquad f'(z)\varphi'(y') \text{ und } \varphi(x, y, y') - z'f'(z)\varphi'(y'),$$

wenn für y gesetzt wird $f(x, z)$ und darauf für x und z die Coordinaten des Eckpunktes eingesetzt werden, für zwei verschiedene Werthe von z' dieselben Werthe annehmen können. Dieser Bedingung wird zunächst durch discontinuirliche Lösungen genügt, welche denen entsprechen, die V zu einem Maximum oder Minimum machen. Ausserdem aber nehmen die Ausdrücke (26.) stets dieselben Werthe an, wenn $f'(z) = 0$ und z' nicht ∞ ist. — Es ist

$$y' = f'(x) + z'f'(z),$$

und da unter den gemachten Voraussetzungen $z'f'(z)$ verschwindet, so würde zu der Bedingungsgleichung

$$(27.)\qquad f'(z) = 0$$

noch folgende hinzutreten

$$(28.)\qquad f'(x) = y'.$$

Ein Stück der Curve $f'(z) = 0$ kann als der eine von dem Eckpunkt ausgehende Curvenzweig betrachtet werden. Der andere Zweig müsste dann der Gleichung

$$\varphi'(y) - \frac{d}{dx}\varphi'(y') = 0$$

genügen. —

Aber auch wenn $z' = \infty$ und $z'f'(z)$ eine endliche Grösse ist, kann ein Eckpunkt vorhanden sein, wenn der zweite Ausdruck (26.) für zwei verschiedene Werthe von $z'f'(z)$ denselben Werth annimmt. —

Auf die eben betrachtete Weise lässt sich folgende Aufgabe lösen: Es soll V zu einem Maximum gemacht werden, wenn ein gewisses Gebiet abgegrenzt ist, in das die gesuchte Curve nicht kommen darf.

Ich setze $y = f(x, z)$, wo die Function $f(x, z)$ so zu bestimmen ist, dass, wenn der Punkt x, y ausserhalb des abgegrenzten Gebietes oder auch auf der Grenzcurve liegt, sich ein reeller Werth von z finden lässt, für den die Function den Werth y annimmt; liegt x, y aber innerhalb des abgegrenzten Gebietes, so darf dies durch einen reellen Werth von z nicht erreicht werden können.

Jetzt kommt unsere Aufgabe darauf hinaus, das Maximum oder Minimum von W zu finden. Die Curve mit der Gleichung $f'(z) = 0$ wird hier, wenn man für z seinen Ausdruck in x und y einsetzt, eben jene Grenzcurve. Dies geht daraus hervor, dass die Function $f(x, z)$ für Werthe von x und z, die denjenigen Werthen von x und y entsprechen, die Coordinaten der Grenzcurve sind, ein Maximum oder ein Minimum in Bezug auf z haben muss, da sie, wenn z sich unendlich wenig ändert, entweder nur abnehmen oder nur zunehmen kann. Es muss also $f'(z)$ verschwinden. Wir sehen somit, dass ein Theil der discontinuirlichen Lösung von einem Stück der Grenzcurve gebildet werden kann. An einem Punkte, in welchem diese mit einer anderen Curve zusammenstösst, muss für letztere die Gleichung (28.) gelten. Wir haben aber auch für die Grenzcurve

$$y' = f'(x) + z'f'(z) = f'(x).$$

Daraus folgt, dass die beiden Curven sich berühren müssen.

Es ist aber noch eine discontinuirliche Lösung anderer Art möglich, bei welcher auch die Eckpunkte in die Grenzcurve fallen, wenn nämlich

der zweite der Ausdrücke (26.) für zwei verschiedene Werthe von $z'f'(z)$ denselben Werth annehmen kann. Von den beiden zusammenstossenden Curven kann die eine die Grenzcurve sein und die andere der Gleichung

$$\varphi'(y) - \frac{d}{dx}\varphi'(y') = 0$$

genügen. Sie können aber auch beide von der letzteren Art sein. —

Herr *Todhunter* behandelt hauptsächlich Probleme, bei denen die Unstetigkeit durch Bedingungen herbeigeführt wird. Nach der von mir angedeuteten Methode dürften sich diese Probleme zum Theil einfacher lösen lassen. Ich will nur ein Beispiel anführen.

Es soll zwischen zwei Punkten eine Linie derartig gezogen werden, dass der durch Rotation derselben um die y-Axe entstehende Körper bei einer in der Richtung der y-Axe fortschreitenden Bewegung in einem Fluidum den geringsten Widerstand erleidet.

Wir haben für diesen Fall

$$V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{x\,dx}{1+y'^2}.$$

Sind y_{00} und y_{n1} die den Endpunkten zugehörigen Ordinaten, so kann als Bedingung angesehen werden, dass y stets zwischen y_{00} und y_{n1} liegen muss, da sonst kein Rotationskörper zu Stande kommen würde. Die Grenzlinien wären somit die durch die Endpunkte gehenden mit der x-Axe parallelen Linien.

Das Problem führt auf die Gleichung

$$(29.)\qquad \frac{xy'}{(1+y'^2)^2} = C.$$

Ich werde hier nur untersuchen, ob eine zum Theil von den Grenzlinien gebildete discontinuirliche Lösung möglich ist.

Soll eine durch (29.) dargestellte Curve eine Grenzlinie berühren, so muss $y' = 0$ werden, was unmöglich ist. Wir können daher eine unstetige Lösung nur erhalten, wenn der zweite Ausdruck (26.) für die beiden Curvenzweige denselben Werth annimmt. Da z in unserem Falle nur von y abhängig ist, so ist $z'f'(z) = y'$ und der betreffende Ausdruck geht über in

$$\frac{x(1+3y'^2)}{(1+y'^2)^2} = M.$$

Für die Grenzlinie wird $y' = 0$ und $M = x$; denselben Werth kann M nur für $y' = \pm 1$ erhalten; es muss also die Curve die Grenzlinie in einem Winkel von 45^0 schneiden.

Berlin, den 15. November 1875.

Ueber die Brechung eines Lichtstrahls durch ein Linsensystem.

(Von Herrn *H. Zincken* gen. *Sommer* in Braunschweig.)

Die Verfolgung eines Lichtstrahls auf seinem Wege durch ein System von Linsengläsern mit gemeinschaftlicher Axe hat viele Untersuchungen veranlasst, aber zu wenig übersichtlichen Ergebnissen geführt, sobald die sogenannte sphärische Abweichung und die Dicken und Entfernungen der Linsen in Rechnung gezogen wurden. Die genaue Berücksichtigung der letzteren Werthe unbeschadet der Eleganz der Resultate, hat erst *Gauss* durch seine Begriffsbestimmung der Brennweiten und Hauptpunkte erreicht, und Herr *Listing* hat durch Einführung der Kreuzungspunkte die Untersuchung auf den Fall ausgedehnt, in welchem das erste und letzte Medium von einander verschieden sind. Beide zogen aber nur Strahlen in Betracht, deren Neigung gegen die Axe verschwindend klein, und schon die Berücksichtigung der sphärischen Abweichung erster Ordnung, wie ich sie in meinen „Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme" unternommen, hat zu einer nicht unbeträchtlichen Complication der Formeln geführt.

Es scheint mir nun bemerkenswerth zu sein, dass sich die Abhängigkeit des gebrochenen Strahls vom einfallenden ohne jedwede Vernachlässigung und zwar durch sehr einfache Gesetze darstellen lässt, wenn man die *Gauss*'schen Definitionen derart erweitert, dass jedem Strahle je nach seiner Lage besondere Brennweiten, sowie auch besondere Brenn-, Haupt- und Kreuzungspunkte zugetheilt werden: Nach Ermittelung dieser Bestimmungsstücke, welche übrigens von den *Gauss*'schen nur um Werthe zweiter Ordnung abweichen, kann der Weg des Strahles ohne Weiteres genau angegeben werden. Nachdem ich schon in den Monatsberichten der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Februar 1876) die wichtigsten Gesetze synthetisch begründet, beabsichtige ich an dieser Stelle dieselben analytisch zu entwickeln und ihre nächsten Consequenzen darzulegen.

Brechung an einer Fläche.

Wird ein Lichtstrahl an irgend einer Fläche gebrochen, so liegen der einfallende, der gebrochene Strahl und das Einfallsloth in einer Ebene; es lässt sich daher ein Dreieck construiren, dessen Seiten zu den Richtungen dieser drei Graden parallel sind und sich verhalten wie $\sin\psi:\sin\varphi:\sin(\varphi-\psi)$, wenn φ den Winkel des einfallenden und ψ den des gebrochenen Strahls — beide in der Fortpflanzungsrichtung des Lichts genommen — mit der dem zweiten Medium zugewendeten Normalen der brechenden Fläche bezeichnet. Sind nun ξ, η, ζ die Cosinus der Winkel, welche der einfallende Strahl mit den Axen irgend eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, und haben λ, μ, ν und α, β, γ dieselbe Bedeutung für den gebrochenen Strahl, resp. für das Einfallsloth, so ergeben sich durch Projection der Seiten jenes Dreiecks auf die Coordinatenaxen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\xi\sin\psi-\lambda\sin\varphi+\alpha\sin(\varphi-\psi) &= 0,\\
\eta\sin\psi-\mu\sin\varphi+\beta\sin(\varphi-\psi) &= 0,\\
\zeta\sin\psi-\nu\sin\varphi+\gamma\sin(\varphi-\psi) &= 0.
\end{aligned}$$

Sind m und n die absoluten Brechungsindices des Lichtstrahls in den durch die brechende Fläche getrennten Medien, so verhalten sich dem Brechungsgesetze gemäss

$$\sin\psi : \sin\varphi : \sin(\varphi-\psi) = m : n : (n\cos\psi - m\cos\varphi),$$

so dass die eben entwickelte Gruppe von Gleichungen auch durch

$$(1.)\quad \begin{cases} m\xi - n\lambda + (n\cos\psi - m\cos\varphi)\alpha = 0,\\ m\eta - n\mu + (n\cos\psi - m\cos\varphi)\beta = 0,\\ m\zeta - n\nu + (n\cos\psi - m\cos\varphi)\gamma = 0 \end{cases}$$

ersetzt werden kann. Der Werth $(n\cos\psi - m\cos\varphi)$ ist bei der Untersuchung der Brechung von grosser Bedeutung; er tritt als die zum Einfallslothe parallele Verbindungslinie der Endpunkte auf, wenn vom Einfallspunkte aus auf den Strahlen m und n aufgetragen werden, und ist für verschwindend kleine Einfallswinkel gleich $n-m$.

Brechung durch eine Linse.

Für die Brechung an der ersten Fläche sollen die bisherigen Bezeichnungen, für die abermalige Brechung dieselben Buchstaben accentuirt, jedoch in umgekehrter Folge verwendet werden; es kommen demnach dem

durch die Linse gebrochenen Strahle der Brechungsindex m_1, die Axencosinus ξ_1, η_1, ζ_1 und der Winkel φ_1 mit der Flächennormale zu, während der Strahl vor der zweiten Brechung die frühern Axencosinus λ, μ, ν hat, aber mit dem zweiten Einfallslothe den Winkel ψ_1 einschliesst. Da nun die Brechung an der zweiten Fläche durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1\xi_1 - n\lambda + (n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\alpha_1 &= 0,\\ m_1\eta_1 - n\mu + (n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\beta_1 &= 0,\\ m_1\zeta_1 - n\nu + (n\cos\psi_1 - m_1\cos\psi_1)\gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt wird, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} m_1\xi_1 - m\xi + (n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\alpha_1 - (n\cos\psi - m\cos\varphi)\alpha &= 0,\\ m_1\eta_1 - m\eta + (n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\beta_1 - (n\cos\psi - m\cos\varphi)\beta &= 0,\\ m_1\zeta_1 - m\zeta + (n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\gamma_1 - (n\cos\psi - m\cos\varphi)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Es mögen nun r und r_1 als Radien der brechenden Kugelflächen und zwar dann mit positivem Vorzeichen angenommen werden, wenn die betreffende Fläche nach aussen convex ist; bezeichnen r und r_1 gleichzeitig die Mittelpunkte der Kugelflächen, so soll die Entfernung $\overline{rr_1}$ derselben gleich p, die Länge des innerhalb der Linse verlaufenden Strahles, also die Entfernung der Einfallspunkte gleich $n.d$ gesetzt werden. Wenn nun die Grössen $f, f_1, \mathfrak{f}, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1$ durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{f} = \dfrac{n\cos\psi - m\cos\varphi}{r}, \quad \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1}{r_1},\\ \dfrac{1}{\mathfrak{f}} = \dfrac{1}{f} + \dfrac{1}{f_1} - \dfrac{d}{ff_1},\\ \mathfrak{i} = \mathfrak{f}p:f_1, \quad \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{f}p:f,\\ \mathfrak{e} = \mathfrak{f}d:f_1, \quad \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{f}d:f \end{cases}$$

bestimmt werden, so ist $m.\mathfrak{f}$ die erste, $m_1.\mathfrak{f}$ die zweite Brennweite der Linse für den Strahl; werden von den Mittelpunkten r und r_1 auf der die Axe bildenden Graden $\overline{rr_1}$ den bezüglichen Flächen abgewendet die Strecken $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}_1$ abgetragen, so gelangt man zu den Kreuzungspunkten der Linse für den Strahl, welche selbst durch $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}_1$ bezeichnet werden sollen; diese seien auch die Anfangspunkte zweier rechtwinkligen, für den einfallenden, resp. den gebrochenen Strahl bestimmten Coordinatensysteme; die Coordinatenaxen sollen in der Richtung übereinstimmen, die Axen der in der Fortpflanzungsrichtung des Strahls wachsenden Abscissen mögen mit der Axe $\overline{rr_1}$

der Linse zusammenfallen. Trägt man die Strecken $m.\mathfrak{e}$ und $m_1.\mathfrak{e}_1$ auf dem einfallenden, resp. dem gebrochenen Strahle vom Einfallspunkte aus nach innen auf, so ergeben sich die Hauptpunkte der Strahlen, welche $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ genannt und deren Coordinaten durch x^0, y^0, z^0 resp. x_1^0, y_1^0, z_1^0 bezeichnet werden sollen. Werden endlich auf dem einfallenden resp. dem gebrochenen Strahle von dem Hauptpunkte aus die Strecken $m.\mathfrak{f}$ und $m_1.\mathfrak{f}$ nach aussen abgetragen, so gelangt man zu den Brennpunkten der Strahlen, und diese mögen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ heissen. Die nachfolgenden Betrachtungen erleiden übrigens keine Aenderung, wenn statt der Kugelflächen irgend welche brechenden Flächen vorausgesetzt werden, und r und r_1 beliebige Punkte auf der innern Seite der Einfallslothe bedeuten.

Als Coordinaten der Einfallspunkte ergeben sich nun

$$\begin{aligned} x^0 - \mathfrak{e}.m\xi &= -r\alpha - \mathfrak{i}, \\ y^0 - \mathfrak{e}.m\eta &= -r\beta, \\ z^0 - \mathfrak{e}.m\zeta &= -r\gamma, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} x_1^0 + \mathfrak{e}_1.m_1\xi_1 &= +r_1\alpha_1 + \mathfrak{i}_1, \\ y_1^0 + \mathfrak{e}_1.m_1\eta_1 &= +r_1\beta_1, \\ z_1^0 + \mathfrak{e}_1.m_1\zeta_1 &= +r_1\gamma_1, \end{aligned}$$

und andererseits lässt die Projection der Einfallspunkte auf die Richtungen der Coordinatenaxen ersehen, dass

$$\begin{aligned} d.n\lambda &= r\alpha + r_1\alpha_1 + p, \\ d.n\mu &= r\beta + r_1\beta_1, \\ d.n\nu &= r\gamma + r_1\gamma_1. \end{aligned}$$

Werden nun diese letzteren Gleichungen mit $(\mathfrak{f}:f_1)$, dann mit $(-\mathfrak{f}:f)$ multiplicirt und zu der ersten, resp. der zweiten Gruppe der vorgehenden Gleichungen addirt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} x^0 &= \mathfrak{f}[(n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\alpha_1 - (n\cos\psi - m\cos\varphi)\alpha] = x_1^0, \\ y^0 &= \mathfrak{f}[(n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\beta_1 - (n\cos\psi - m\cos\varphi)\beta] = y_1^0, \\ z^0 &= \mathfrak{f}[(n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1)\gamma_1 - (n\cos\psi - m\cos\varphi)\gamma] = z_1^0, \end{aligned}$$

oder

$$(3.)\quad \begin{cases} x^0 = \mathfrak{f}[m\xi - m_1\xi_1] = x_1^0, \\ y^0 = \mathfrak{f}[m\eta - m_1\eta_1] = y_1^0, \\ z^0 = \mathfrak{f}[m\zeta - m_1\zeta_1] = z_1^0. \end{cases}$$

Die Lage eines Hauptpunktes zum zugehörigen Kreuzungspunkte ist hiernach vor und nach der Brechung genau dieselbe, und die Figur $\mathfrak{e}\mathfrak{i}\mathfrak{i}_1\mathfrak{e}_1$ ein Parallelogramm. Die Ebene desselben soll Hauptebene, die parallelen Verbindungslinien der zugehörigen Haupt- und Kreuzungspunkte sollen Hauptlinien heissen; für die übereinstimmende Entfernung der Haupt- und Kreuzungspunkte

$$\overline{\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1} = \overline{\mathfrak{i}\mathfrak{i}_1} = -\mathfrak{f}pd:ff_1 = pd:(f+f_1-d)$$

hat bereits Herr *Listing* den Namen Interstitium eingeführt.

Die Gleichungen (3.) führen unmittelbar zu folgenden Ergebnissen:

Wird die durch die Linse bewirkte Ablenkung des Strahls, also der Winkel zwischen den Fortschrittsrichtungen des einfallenden und des gebrochenen Strahls durch $\varkappa$ bezeichnet, so erhalten die Hauptlinien die Länge

$$\overline{\mathfrak{e}\mathfrak{i}} = \overline{\mathfrak{e}_1\mathfrak{i}_1} = \mathfrak{f}\sqrt{\Sigma(m\xi - m_1\xi_1)^2} = \mathfrak{f}M,$$

wenn

$$M = \sqrt{(m^2 - 2mm_1\cos\varkappa + m_1^2)}$$

gesetzt wird. Die Axencosinus der von den Haupt- nach den Kreuzungspunkten gerichteten Hauptlinien werden

$$(m_1\xi_1 - m\xi):M, \quad (m_1\eta_1 - m\eta):M, \quad (m_1\zeta_1 - m\zeta):M,$$

und die Winkel, welche die Hauptlinien mit den Strahlen bilden, sind durch ihre Cosinus

$$(m_1\cos\varkappa - m):M, \qquad (m_1 - m\cos\varkappa):M,$$

und ihre Sinus

$$m_1\sin\varkappa:M, \quad m\sin\varkappa:M$$

bestimmt.

Wird auf der Hauptebene ein Loth in dem der Lage der Z-Axe zur XY-Ebene entsprechenden Sinne errichtet, so sind seine Axencosinus

$$0, \quad +\frac{m_1\zeta_1 - m\zeta}{\sqrt{(m_1\eta_1 - m\eta)^2 + (m_1\zeta_1 - m\zeta)^2}}, \qquad -\frac{m_1\eta_1 - m\eta}{\sqrt{(m_1\eta_1 - m\eta)^2 + (m_1\zeta_1 - m\zeta)^2}},$$

und für die Cosinus der Winkel, welche dieses Loth mit dem einfallenden, resp. dem gebrochenen Strahle bildet, ergeben sich daher die Werthe

$$m_1\frac{\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta}{\sqrt{(m_1\eta_1 - m\eta)^2 + (m_1\zeta_1 - m\zeta)^2}}, \quad m\frac{\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta}{\sqrt{(m_1\eta_1 - m\eta)^2 + (m_1\zeta_1 - m\zeta)^2}}.$$

Legt man durch den ein- resp. den austretenden Strahl und den zugehörigen Kreuzungspunkt Ebenen, so erhalten die Axencosinus der darauf errichteten Lothe die gemeinschaftlichen Werthe

$$\frac{\eta\zeta_1-\eta_1\zeta}{\pm\sin\varkappa},\quad \frac{\zeta\xi_1-\zeta_1\xi}{\pm\sin\varkappa},\quad \frac{\xi\eta_1-\xi_1\eta}{\pm\sin\varkappa}.$$

Die von den Kreuzungspunkten auf die zugehörigen Strahlen gefällten Lothe haben die Längen $m_1\mathfrak{f}\sin\varkappa$ und $m\mathfrak{f}\sin\varkappa$.

Es gelten hiernach folgende Gesetze:

Die durch den einfallenden Strahl und den ersten Kreuzungspunkt, resp. durch den gebrochenen Strahl und den zweiten Kreuzungspunkt gelegten Ebenen sind parallel, und deswegen gleich geneigt zur Hauptebene; sie enthalten die Richtungen des einfallenden, des gebrochenen Strahles und der Hauptlinien.

Die Entfernungen des einfallenden und des durch die Linse gebrochenen Strahles von den zugehörigen Kreuzungspunkten, ebenso die Sinus der Winkel, welche jene Strahlen mit den Hauptlinien, resp. der Hauptebene bilden, verhalten sich wie $m_1 : m$, d. h. wie die Brechungsindices der Medien hinter und vor der Linse. Diese Sinus und ebenso die erwähnten Entfernungen werden daher unter einander gleich, wenn die Linse beiderseits von demselben Medium umgeben ist.

Schon hierauf gestützt würde man leicht eine Construction des gebrochenen Strahles angeben können, wenn der einfallende Strahl und die zugehörigen Brennweiten und Kreuzungspunkte gegeben wären. Noch einfacher gestaltet sich diese Construction durch die Betrachtung der Brennpunkte. Die Coordinaten von $\mathfrak{f}$ werden

$$x^0-\mathfrak{f}.m\xi,\quad y^0-\mathfrak{f}.m\eta,\quad z^0-\mathfrak{f}.m\zeta,$$

oder

$$-\mathfrak{f}.m_1\xi_1,\quad -\mathfrak{f}.m_1\eta_1,\quad -\mathfrak{f}.m_1\zeta_1,$$

die von $\mathfrak{f}_1$ aber werden

$$x_1^0+\mathfrak{f}.m_1\xi_1,\quad y_1^0+\mathfrak{f}.m_1\eta_1,\quad z_1^0+\mathfrak{f}.m_1\zeta_1,$$

oder

$$+\mathfrak{f}.m\xi,\quad +\mathfrak{f}.m\eta,\quad +\mathfrak{f}.m\zeta.$$

Es zeigt sich also, dass die Richtung von $\overline{\mathfrak{f}\mathfrak{i}}$ die des gebrochenen Strahles, die Richtung von $\overline{\mathfrak{i}_1\mathfrak{f}_1}$ die des eintretenden Strahles ist, sowie dass die Längen dieser Linien mit der zweiten, resp. der ersten Brennweite übereinstimmen. Die Construction kann demnach folgendermassen geschehen. Der Brenn-

punkt $\mathfrak{f}$ des eintretenden Strahles ist durch seine Entfernung $m_1\mathfrak{f}$ vom ersten Kreuzungspunkte bestimmt, der Brennpunkt $\mathfrak{f}_1$ des gebrochenen Strahles wird durch Auftragen von $m\mathfrak{f}$ auf der durch den zweiten Kreuzungspunkt zum eintretenden Strahle gezogenen Parallelen ermittelt. Durch diesen Punkt, parallel zu $\overline{\mathfrak{f}\mathfrak{i}}$ ist der gebrochene Strahl zu legen. Insofern für $\mathfrak{f}$ zwei verschiedene Punkte und demgemäss zwei verschiedene Lagen des gebrochenen Strahles sich ergeben, ist ersichtlich, dass zwei verschiedene brechende Linsen zu den gegebenen Brennweiten und Kreuzungspunkten gehören, von welchen die eine um einen spitzen Winkel, die andere um den stumpfen Nebenwinkel den gegebenen Strahl ablenkt. Die letztere Möglichkeit, welche nur bei ausserordentlich grossen Einfallswinkeln eintreten könnte, ist in Wirklichkeit ausser Acht zu lassen. Wohl aber ist das Vorzeichen der Brennweite zu beachten; da nämlich die Entfernung des einfallenden Strahles vom ersten Kreuzungspunkte gleich $m\mathfrak{f}\sin\varkappa$, so ist für negative Brennweiten der Ablenkungswinkel $\varkappa$ negativ, welcher Umstand bei der Bestimmung des Punktes $\mathfrak{f}$ von Einfluss ist.

Der Vergleichung halber sei daran erinnert, dass *Gauss*, der nur den Fall der ersten Annäherung in Betracht zog, als geometrischen Ort für die Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ die von ihm eingeführten Fokalebenen fand und darauf seine Construction des gebrochenen Strahles gründete, während die genaue Construction dafür Kugelflächen, mit $m_1\mathfrak{f}$ und $m\mathfrak{f}$ aus $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i}_1$ beschrieben, liefern würde, wenn nicht, da die Brennweiten und Kreuzungspunkte von der Lage des Strahles abhängig, die Mittelpunkte und Radien dieser Kugelflächen selbst veränderlich wären. Abgesehen vom besonderen Falle, in welchem $\mathfrak{f} = \infty$, wird nur derjenige Strahl keine Richtungsänderung erfahren, der durch seinen Kreuzungspunkt hindurchgeht; der Sinus der Ablenkung wächst mit der Entfernung des Strahles vom Kreuzungspunkte und erreicht seinen Maximalwerth, wenn diese Entfernung gleich $m_1\mathfrak{f}$ ist; Strahlen in noch grösserer Entfernung werden überhaupt nicht durch die Linse gebrochen.

Die von Herrn *Listing* für den speciellen Fall von der Axe nur wenig abweichender Strahlen eingeführten „accessorischen Punkte" können ebenfalls in der vorliegenden allgemeinen Untersuchung nachgewiesen und zur Construction des gebrochenen Strahles benutzt werden; trägt man nämlich auf dem eintretenden und dem gebrochenen Strahle von ihren Hauptpunkten aus nach aussen die Strecken $\overline{\mathfrak{e}\mathfrak{g}} = 2m\mathfrak{f}$, resp. $\overline{\mathfrak{e}_1\mathfrak{g}_1} = 2m_1\mathfrak{f}$ ab, so ergeben

sich für den Punkt $\mathfrak{g}$ die Coordinaten

$$x^0 - 2\mathfrak{f}m\xi,\quad y^0 - 2\mathfrak{f}m\eta,\quad z^0 - 2\mathfrak{f}m\zeta$$

oder

$$-\mathfrak{f}(m\xi + m_1\xi_1),\quad -\mathfrak{f}(m\eta + m_1\eta_1),\quad -\mathfrak{f}(m\zeta + m_1\zeta_1),$$

während die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{g}_1$

$$x_1^0 + 2\mathfrak{f}m_1\xi_1,\quad y_1^0 + 2\mathfrak{f}m_1\eta_1,\quad z_1^0 + 2\mathfrak{f}m_1\zeta_1,$$

oder

$$+\mathfrak{f}(m\xi + m_1\xi_1),\quad +\mathfrak{f}(m\eta + m_1\eta_1),\quad +\mathfrak{f}(m\zeta + m_1\zeta_1)$$

werden. Die von den Kreuzungspunkten nach den accessorischen Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ geführten Geraden erhalten daher die übereinstimmende Länge $\mathfrak{f}\sqrt{m^2 + 2mm_1\cos x + m_1^2}$ und entgegengesetzte Richtung: die Verwendung der Lage dieser Punkte zur Construction des gebrochenen Strahles bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung. Bezeichnen wir den im Unendlichen liegenden Punkt eines Strahles durch $\mathfrak{o}$ resp. $\mathfrak{o}_1$, so zeigt es sich, dass dieser unendlich entfernte Punkt stets vom Brennpunkte harmonisch getrennt ist durch den Haupt- und den accessorischen Punkt, und noch bemerkenswerther ist, dass die Geraden, welche $\mathfrak{o}, \mathfrak{g}, \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{i}$ aus, und diejenigen, welche $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{o}_1$ und $\mathfrak{e}_1$ von $\mathfrak{i}_1$ aus projiciren, untereinander parallel sind.

Auch auf dem Wege der Rechnung lässt sich die Lage des austretenden Strahles bestimmen. Wird in beliebiger Entfernung $m\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{e}$ nach aussen hin ein Punkt $\mathfrak{t}$ auf dem einfallenden Strahle angenommen, dessen Coordinaten x, y, z sein mögen, und haben $\mathfrak{t}_1, x_1, y_1, z_1$ dieselbe Bedeutung für irgend einen Punkt des gebrochenen Strahles, so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} x^0 = x + \mathfrak{t}m\xi = \mathfrak{f}(m\xi - m_1\xi_1) = x_1 - \mathfrak{t}_1.m_1\xi_1 = x_1^0, \\ y^0 = y + \mathfrak{t}m\eta = \mathfrak{f}(m\eta - m_1\eta_1) = y_1 - \mathfrak{t}_1.m_1\eta_1 = y_1^0, \\ z^0 = z + \mathfrak{t}m\zeta = \mathfrak{f}(m\zeta - m_1\zeta_1) = z_1 - \mathfrak{t}_1.m_1\zeta_1 = z_1^0. \end{cases}$$

Es wird demnach

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma x^2 = [-m\mathfrak{t} - (m_1\cos x - m)\mathfrak{f}]^2 + m_1^2\sin^2 x\,\mathfrak{f}^2, \\ \Sigma x\xi = \quad -m\mathfrak{t} - (m_1\cos x - m)\mathfrak{f}, \\ \Sigma x_1^2 = [m_1\mathfrak{t}_1 - (m_1 - m\cos x)\mathfrak{f}]^2 + m^2\sin^2 x\,\mathfrak{f}^2, \\ \Sigma x_1\xi_1 = \quad m_1\mathfrak{t}_1 - (m_1 - m\cos x)\mathfrak{f}, \end{cases}$$

und die Bestimmung der Richtung des gebrochenen Strahles kann durch

successive Anwendung der Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \sin^2\varkappa = [\Sigma x^2 - (\Sigma x\xi)^2] : m_1^2 \mathfrak{f}^2, \\ \xi_1 = \xi\cos\varkappa - (x - \xi\Sigma x\xi) : m_1\mathfrak{f}, \\ \eta_1 = \eta\cos\varkappa - (y - \eta\Sigma x\xi) : m_1\mathfrak{f}, \\ \zeta_1 = \zeta\cos\varkappa - (z - \zeta\Sigma x\xi) : m_1\mathfrak{f} \end{cases}$$

erfolgen. Um die Coordinaten eines beliebigen Punktes $\mathfrak{k}_1$ dieses Strahles zu erhalten, können die aus (4.) sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} x : \mathfrak{k} + m\xi &= (m\xi - m_1\xi_1)\mathfrak{f} : \mathfrak{k}, \\ y : \mathfrak{k} + m\eta &= (m\eta - m_1\eta_1)\mathfrak{f} : \mathfrak{k}, \\ z : \mathfrak{k} + m\zeta &= (m\zeta - m_1\zeta_1)\mathfrak{f} : \mathfrak{k} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 : \mathfrak{k}_1 - m_1\xi_1 &= (m\xi - m_1\xi_1)\mathfrak{f} : \mathfrak{k}_1, \\ y_1 : \mathfrak{k}_1 - m_1\eta_1 &= (m\eta - m_1\eta_1)\mathfrak{f} : \mathfrak{k}_1, \\ z_1 : \mathfrak{k}_1 - m_1\zeta_1 &= (m\zeta - m_1\zeta_1)\mathfrak{f} : \mathfrak{k}_1 \end{aligned}$$

benutzt werden, deren Addition

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{\mathfrak{k}_1} + \dfrac{x}{\mathfrak{k}} = \left(\dfrac{1}{\mathfrak{k}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{k}} - \dfrac{1}{\mathfrak{f}}\right)(m\xi - m_1\xi_1)\mathfrak{f}, \\ \dfrac{y_1}{\mathfrak{k}_1} + \dfrac{y}{\mathfrak{k}} = \left(\dfrac{1}{\mathfrak{k}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{k}} - \dfrac{1}{\mathfrak{f}}\right)(m\eta - m_1\eta_1)\mathfrak{f}, \\ \dfrac{z_1}{\mathfrak{k}_1} + \dfrac{z}{\mathfrak{k}} = \left(\dfrac{1}{\mathfrak{k}_1} + \dfrac{1}{\mathfrak{k}} - \dfrac{1}{\mathfrak{f}}\right)(m\zeta - m_1\zeta_1)\mathfrak{f} \end{cases}$$

liefert. Erwähnenswerth ist auch die mit Benutzung von (5.) sich ergebende Gleichung

$$(8.)\quad \Sigma\frac{x_1^2}{\mathfrak{k}_1^2} - \Sigma\frac{x^2}{\mathfrak{k}^2} = \left(\frac{1}{\mathfrak{k}_1} + \frac{1}{\mathfrak{k}} - \frac{1}{\mathfrak{f}}\right)\left[\left(\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{k}_1} - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{k}}\right)M^2 - m_1^2 + m^2\right]\mathfrak{f}.$$

Sind x, y, z die Coordinaten eines Object-, x_1, y_1, z_1 die des zugehörigen Bildpunktes, so ist $m_1 k_1$ abhängig von mk in einer Weise, die zu entwickeln ich mir für eine andere Gelegenheit vorbehalten muss; es sei hier nur darauf hingedeutet, dass dann

$$\frac{1}{\mathfrak{k}_1} + \frac{1}{\mathfrak{k}} - \frac{1}{\mathfrak{f}}$$

mit dem Gliede der sogenannten sphärischen Abweichung aufs engste zusammenhängt und bei kleinen Einfallswinkeln ebenfalls klein wird, sowie dass die Beurtheilung der Aehnlichkeit von Bild und Object, wobei die

Kreuzungspunkte die Rolle der Aehnlichkeitspunkte spielen, auf die vorstehenden Gleichungen zurückgeführt werden kann.

Beispielsweise möge ein Strahl untersucht werden, welcher vor und folglich auch nach der Brechung die Axe schneidet. Werden $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_1$ als die Schnittpunkte angenommen, so ist $y = 0$, $z = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$ und also den Gleichungen (7.) zufolge

$$\frac{1}{\mathfrak{k}_1} + \frac{1}{\mathfrak{k}} - \frac{1}{\mathfrak{f}} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\mathfrak{k}_1} + \frac{x}{\mathfrak{k}} = 0.$$

Ist etwa $\mathfrak{k} = \infty$ und demnach $\frac{x}{\mathfrak{k}} = -m$, so ergiebt sich $m_1.\mathfrak{k}_1 = m_1.\mathfrak{f}$, $x_1 = m.\mathfrak{f}$; der Brennpunkt des austretenden Strahles liegt daher auf der Axe, und zwar um die erste Brennweite vom zweiten Kreuzungspunkte entfernt. Die Verschiebung, welche dieser Schnittpunkt für verschiedene parallel zur Axe einfallende Strahlen erleidet, ist also zu beurtheilen nach der damit zusammenhängenden Verschiebung von $\mathfrak{i}_1$ und der Veränderung, welche die Brennweite erleidet.

Schneidet der einfallende Strahl die Axe in einem eigentlichen Punkte, so ergiebt sich aus den allgemeinen Gleichungen (6.)

$$x\sqrt{1-\xi^2} : m_1 = \mathfrak{f} \sin\varkappa = x_1\sqrt{1-\xi_1^2} : m,$$

$$\xi_1 = \xi\cos\varkappa - \sqrt{1-\xi^2}\sin\varkappa,$$

und da demgemäss

$$(1-\xi_1^2) - 2\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi_1^2}\cos\varkappa + (1-\xi^2) = \sin^2\varkappa,$$

so sind die Schnittpunktsentfernungen durch die Gleichung

$$\left(\frac{1}{m_1 x_1}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{m_1 x_1}\right)\left(\frac{1}{m x}\right)\cos\varkappa + \left(\frac{1}{m x}\right)^2 = \left(\frac{1}{m m_1}\mathfrak{f}\right)^2$$

verbunden.

Die Bestimmung der Lage eines Strahles nach der Brechung durch die Linse lässt sich, wie im Vorstehenden dargelegt, auf die Kenntniss seiner Brennweiten und Kreuzungspunkte zurückführen. Für verschwindend kleine Einfallswinkel stimmt die hier gegebene Definition dieser Bestimmungsstücke mit der frühern überein, und dieser Umstand ist für die erste Annäherung von Wichtigkeit. Für die genaue Berechnung derselben lässt sich ein Anhalt gewinnen durch die Projection des zwischen den Einfallspunkten

verlaufenden Strahles auf die Coordinatenaxen, diese liefert

$$d.n\lambda = \mathfrak{e}.m\xi + \mathfrak{e}_1 m_1 \xi_1 - pd\mathfrak{f} : ff_1,$$
$$d.n\mu = \mathfrak{e}.m\eta + \mathfrak{e}_1 m_1 \eta_1,$$
$$d.n\nu = \mathfrak{e}.m\zeta + \mathfrak{e}_1 m_1 \zeta_1,$$

und demnach

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{n\lambda}{\mathfrak{f}} = \dfrac{m\xi}{f_1} + \dfrac{m_1\xi_1}{f} - \dfrac{p}{ff_1}, \\ \dfrac{n\mu}{\mathfrak{f}} = \dfrac{m\eta}{f_1} + \dfrac{m_1\eta_1}{f}, \\ \dfrac{n\nu}{\mathfrak{f}} = \dfrac{m\zeta}{f_1} + \dfrac{m_1\zeta_1}{f}. \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen mit ξ, η, ζ, dann mit ξ_1, η_1, ζ_1 multiplicirt und addirt, so ergiebt sich

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{n\cos(\varphi-\psi)}{\mathfrak{f}} = \dfrac{m}{f_1} + \dfrac{m_1\cos\varkappa}{f} - \dfrac{p\xi}{ff_1}, \\ \dfrac{n\cos(\varphi_1-\psi_1)}{\mathfrak{f}} = \dfrac{m\cos\varkappa}{f_1} + \dfrac{m_1}{f} - \dfrac{p\xi_1}{ff_1}. \end{cases}$$

Die Addition der quadrirten Gleichungen (9.) aber lässt ersehen, dass

$$(11.)\quad \frac{n^2}{\mathfrak{f}^2} = \left(\frac{m}{f_1}\right)^2 + 2\frac{m}{f_1}\frac{m_1}{f}\cos\varkappa + \left(\frac{m_1}{f}\right)^2 - 2\left(\frac{m\xi}{f_1} + \frac{m_1\xi_1}{f}\right)\frac{p}{ff_1} + \left(\frac{p}{ff_1}\right)^2.$$

Es ist bemerkenswerth, dass diese Gleichungen von dem innerhalb der Linse liegenden Stücke des Strahles unabhängig sind; für die in f und f_1 noch enthaltenen Einfallswinkel φ und φ_1 ergeben sich, wenn die quadrirten Gleichungen (10.) einzeln von (11.) subtrahirt werden, als zweckmässiger gestaltete Gleichungen:

$$(12.)\quad \begin{cases} (nf\sin(\varphi-\psi))^2 = (r\sin\varphi)^2 = (m_1\mathfrak{f}\sin\varkappa)^2 - 2m_1\mathfrak{f}\mathfrak{i}(\xi_1 - \xi\cos\varkappa) + \mathfrak{i}^2(1-\xi^2), \\ (nf_1\sin(\varphi_1-\psi_1))^2 = (r_1\sin\varphi_1)^2 = (m\mathfrak{f}\sin\varkappa)^2 - 2m\mathfrak{f}\mathfrak{i}_1(\xi - \xi_1\cos\varkappa) + \mathfrak{i}_1^2(1-\xi_1^2), \end{cases}$$

mit Hülfe welcher die Berechnung allmählich bis zu beliebiger Genauigkeit erhoben werden kann.

Brechung durch eine Combination zweier Linsen mit gemeinschaftlicher Axe.

Die Bezeichnung der auf die einzelnen Linsen und die dort verlaufenden Strahlen bezüglichen Grössen soll in derselben Weise wie bisher geschehen, mit der Modification jedoch, dass der Index ($_1$) für die zweite

Linse reservirt bleibe und die den einander zugekehrten Linsenflächen, sowie dem dazwischen verlaufenden Strahle zugehörigen Werthe durch einen Stern (*) ausgezeichnet werden; es seien also z. B. r, r^*, r_1^*, r_1 die Radien der aufeinander folgenden Flächen, m, n, m^*, n_1, m_1 die Brechungsindices des Lichtstrahles in den auf einander folgenden Medien; es mögen auch die Ablenkungswinkel für die einzelnen Linsen durch $\varkappa^*$ und $\varkappa_1^*$, der Gesammtablenkungswinkel aber durch $\varkappa$ bezeichnet werden. Ist nun $m^*\mathfrak{d}$ die Länge des zwischen den Linsen verlaufenden Strahles, von Hauptpunkt zu Hauptpunkt gerechnet, $\mathfrak{p}$ aber die Entfernung der inneren Kreuzungspunkte, also $m^*\mathfrak{d} = \overline{\mathfrak{e}^*\mathfrak{e}_1^*}$ und $\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{i}^*\mathfrak{i}_1^*}$, und ist ferner

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{\mathfrak{f}} + \frac{1}{\mathfrak{f}_1} - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1},$$
$$\mathfrak{J} = \mathfrak{F}\mathfrak{p} : \mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{p} : \mathfrak{f},$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F}\mathfrak{d} : \mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{d} : \mathfrak{f},$$

so soll $m\mathfrak{F}$ die erste, $m_1\mathfrak{F}$ die zweite Brennweite der Doppellinse für den Strahl heissen; in den Entfernungen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_1$ von dem ersten und letzten Kreuzungspunkte der einzelnen Linsen, und zwar nach innen sollen die Kreuzungspunkte der Doppellinse für den Strahl angenommen, durch $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_1$ bezeichnet und als Anfangspunkte zweier rechtwinkligen, für den einfallenden, resp. den gebrochenen Strahl bestimmten Coordinatensysteme verwendet werden; die Richtungen der Coordinatenaxen sollen mit einander und mit den für die einzelnen Linsen anzunehmenden Coordinatenrichtungen übereinstimmen. Trägt man auf dem einfallenden, resp. dem gebrochenen Strahle von den Hauptpunkten $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ aus die Strecken $m\mathfrak{E}$, resp. $m_1\mathfrak{E}_1$ nach innen ab, so gelangt man zu den Hauptpunkten der Doppellinse für den Strahl, welche $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ genannt und deren Coordinaten durch X^0, Y^0, Z^0, resp. X_1^0, Y_1^0, Z_1^0 bezeichnet werden sollen; endlich gelangt man zu den Brennpunkten $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ des einfallenden, resp. des gebrochenen Strahles, wenn auf diesen Strahlen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ aus die Strecken $m\mathfrak{F}$, resp. $m_1\mathfrak{F}$ nach aussen abgetragen werden.

Als Coordinaten von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ erhält man nun

$$X^0 - \mathfrak{E}.m\xi = x^0 - \mathfrak{J},$$
$$Y^0 - \mathfrak{E}.m\eta = y^0,$$
$$Z^0 - \mathfrak{E}.m\zeta = z^0,$$

und

$$
\begin{aligned}
X_1^0 + \mathfrak{E}_1 . m_1 \xi_1 &= x_1^0 + \mathfrak{J}_1, \\
Y_1^0 + \mathfrak{E}_1 . m_1 \eta_1 &= y_1^0, \\
Z_1^0 + \mathfrak{E}_1 . m_1 \zeta_1 &= z_1^0,
\end{aligned}
$$

ausserdem lässt die Projection von $\mathfrak{e}^*$ und $\mathfrak{e}_1^*$ auf die Coordinatenaxen ersehen, dass

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{d} . m^* \xi^* &= x_1^0 - x^0 + \mathfrak{p}, \\
\mathfrak{d} . m^* \eta^* &= y_1^0 - y^0, \\
\mathfrak{d} . m^* \zeta^* &= z_1^0 - z^0.
\end{aligned}
$$

Werden diese Gleichungen mit $\mathfrak{F} : \mathfrak{f}_1$, dann mit $-\mathfrak{F} : \mathfrak{f}$ multiplicirt und zu der ersten, resp. der zweiten Gruppe der vorhergehenden Gleichungen addirt, so ergiebt sich durch Vergleichung der Resultate, dass

$$
(13.) \quad \begin{cases}
X^0 = X_1^0 = x^0 \mathfrak{F} : \mathfrak{f} + x_1^0 \mathfrak{F} : \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{F}(m\xi - m_1 \xi_1), \\
Y^0 = Y_1^0 = y^0 \mathfrak{F} : \mathfrak{f} + y_1^0 \mathfrak{F} : \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{F}(m\eta - m_1 \eta_1), \\
Z^0 = Z_1^0 = z^0 \mathfrak{F} : \mathfrak{f} + z_1^0 \mathfrak{F} : \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{F}(m\zeta - m_1 \zeta_1).
\end{cases}
$$

Auch für die Doppellinse ist daher die Lage eines Haupt- zum zugehörigen Kreuzungspunkte genau dieselbe vor und nach der Brechung; die Figur $\mathfrak{E}\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1$ wird ein Parallelogramm, dessen Ebene Hauptebene heissen soll, und dessen Seiten die Längen

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{J}\mathfrak{J}_1 = \overline{\mathfrak{i}\mathfrak{i}'} + \overline{\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_1'} - \mathfrak{F}\mathfrak{p}\mathfrak{d} : \mathfrak{f}\mathfrak{f}_1, \\
&\mathfrak{J}\mathfrak{E} = \mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{F}\sqrt{\Sigma(m\xi - m_1\xi_1)^2} = \mathfrak{F}\sqrt{(m^2 - 2mm_1 \cos\varkappa + m_1^2)}
\end{aligned}
$$

erhalten; als Axencosinus dieser letzteren Linien, welche wieder Hauptlinien genannt werden sollen, ergeben sich:

$$
(m\xi - m_1\xi_1) : \sqrt{(m^2 - 2mm_1 \cos\varkappa + m_1^2)}, \quad \text{etc.}
$$

Es wiederholen sich überhaupt, nachdem die Gleichungen (13.) der Form nach mit den Gleichungen (3.) identisch geworden sind, die an letztere geknüpften Folgerungen Schritt für Schritt, so dass auch für die Construction und Berechnung der Lage des durch die Doppellinse gebrochenen Strahles die früheren Gesetze, deren wiederholte Anführung überflüssig sein dürfte, sich ergeben. Der Weg des Lichtstrahles hängt somit nur von den für ihn geltenden Brennweiten und Kreuzungspunkten der Doppellinse ab. Während bei verschwindend kleinen Einfallswinkeln die *Gauss*'schen Definitionen dafür

in Kraft treten, liefert die Projection des zwischen $\mathfrak{e}^*$ und $\mathfrak{e}_1^*$ verlaufenden Strahles auf die Richtungen der Coordinatenaxen

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}.m^*\xi^* &= \mathfrak{E}.m\xi+\mathfrak{E}_1.m_1\xi_1-\mathfrak{F}\mathfrak{p}\mathfrak{d}:\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1,\\ \mathfrak{d}.m^*\eta^* &= \mathfrak{E}.m\eta+\mathfrak{E}_1.m_1\eta_1,\\ \mathfrak{d}.m^*\zeta^* &= \mathfrak{E}.m\zeta+\mathfrak{E}_1.m_1\zeta_1,\end{aligned}$$

und demnach

$$\begin{aligned}\frac{m^*\xi^*}{\mathfrak{F}} &= \frac{m\xi}{\mathfrak{f}_1}+\frac{m_1\xi_1}{\mathfrak{f}}-\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1},\\ \frac{m^*\eta^*}{\mathfrak{F}} &= \frac{m\eta}{\mathfrak{f}_1}+\frac{m_1\eta_1}{\mathfrak{f}},\\ \frac{m^*\zeta^*}{\mathfrak{F}} &= \frac{m\zeta}{\mathfrak{f}_1}+\frac{m_1\zeta_1}{\mathfrak{f}}.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wenn sie entsprechend, wie früher die Gleichungen (9.), behandelt werden,

$$\begin{aligned}\frac{m^*\cos\varkappa^*}{\mathfrak{F}} &= \frac{m}{\mathfrak{f}_1}+\frac{m_1\cos\varkappa}{\mathfrak{f}}-\frac{\mathfrak{p}\xi}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1},\\ \frac{m^*\cos\varkappa_1^*}{\mathfrak{F}} &= \frac{m\cos\varkappa}{\mathfrak{f}_1}+\frac{m_1}{\mathfrak{f}}-\frac{\mathfrak{p}\xi_1}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1},\end{aligned}$$

$$\left(\frac{m^*}{\mathfrak{F}}\right)^2 = \left(\frac{m}{\mathfrak{f}_1}\right)^2+2\frac{m}{\mathfrak{f}_1}\,\frac{m_1}{\mathfrak{f}}\cos\varkappa+\left(\frac{m_1}{\mathfrak{f}}\right)^2-2\left(\frac{m\xi}{\mathfrak{f}_1}+\frac{m_1\xi_1}{\mathfrak{f}}\right)\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1}+\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}(m^*\mathfrak{f}\sin\varkappa^*)^2 &= (m_1\mathfrak{F}\sin\varkappa)^2-2m_1\mathfrak{F}\mathfrak{J}(\xi_1-\xi\cos\varkappa)+\mathfrak{J}^2(1-\xi^2),\\ (m^*\mathfrak{f}_1\sin\varkappa_1^*)^2 &= (m\mathfrak{F}\sin\varkappa)^2-2m\mathfrak{F}\mathfrak{J}_1(\xi-\xi_1\cos\varkappa)+\mathfrak{J}_1^2(1-\xi_1^2).\end{aligned}$$

Die Formeln für die Brechung durch eine Combination zweier Linsen haben durchweg dieselbe Gestalt wie für eine einzelne Linse erhalten. Wird daher eine Doppellinse mit einer andern, oder auch mit einer einfachen Linse combinirt, so gehen abermals Formeln von der nämlichen Gestalt hervor, und demzufolge gelten die entwickelten Gesetze ganz allgemein für irgend welche Systeme von Linsen mit gemeinschaftlicher Axe.

Braunschweig, April 1876.

Ueber einen von *Abel* aufgestellten die algebraischen Functionen betreffenden Lehrsatz.

(Von Herrn *L. Stickelberger* in Zürich.)

In *Abels* „précis d'une théorie des fonctions elliptiques" findet sich der Beweis eines allgemeinen Satzes über die Form derjenigen Integralfunctionen algebraischer Differentialausdrücke, welche durch algebraische und logarithmische Functionen dargestellt werden können*). Ein specieller Fall dieses Satzes ist der folgende, welcher unter Anwendung der von *Abel* benutzten Hülfsmittel von Herrn *Liouville* in seinem „II. mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique"**) bewiesen worden ist:

Bezeichnet z eine algebraische Function der unabhängig veränderlichen Grösse x, und ist die Integralfunction $y = \int z\,dx$ ebenfalls eine algebraische Function von x, so kann die letztere Function y durch das Argument x und die algebraische Function z von x rational ausgedrückt werden;

oder mit anderen Worten:

*Jede algebraische Function y eines Argumentes x lässt sich durch das Argument x und die in Bezug auf x genommene Ableitung $\frac{dy}{dx} = z$ rational ausdrücken****).

In dieser Fassung ist der Satz leicht zu begründen. Denn wenn $F(x, y) = 0$ die irreductible Gleichung ist, welcher y genügt, und F_1, F_2 die partiellen Ableitungen von F nach x und y bedeuten, so hat man nur nachzuweisen, dass die beiden Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) + zF_2(x, y) = 0$$

---

*) Dieses Journal Band IV, p. 264; Oeuvres I, pag. 354.

**) Mémoires des savans étrangers Vol. V, p. 140—142.

***) Dieser Satz ist nur ein specieller Fall des bekannten allgemeineren, dass sich die n-deutige algebraische Function y von x rational durch x und eine beliebige rationale Function z von x, y ausdrücken lässt, wenn z, als Function von x betrachtet, ebenfalls n-deutig ist. Dieser allgemeine Satz ist indessen in dem nachfolgenden Beweise nicht vorausgesetzt, sondern es sind diejenigen Betrachtungen, durch welche derselbe erwiesen wird, direct auf den speciellen Fall angewandt, wo $z = \frac{dy}{dx}$ ist.

nicht mehr als *eine* Wurzel y mit einander gemein haben, oder, da $F_2(x, y)$ nicht gleich Null sein kann, dass für verschiedene Wurzeln y der Gleichung $F(x, y) = 0$ auch die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ verschieden sind. Dies ist aber offenbar der Fall, da sonst eine Wurzel y sich nur durch eine Constante c von einer anderen unterscheiden und folglich die Gleichung $F(x, y) = 0$ eine Wurzel mit $F(x, y+c) = 0$ gemein haben würde, was der Voraussetzung der Irreductibilität von $F(x, y) = 0$ widerspricht.

Die Gleichung $F(x, y) = 0$ definirt nicht allein y als algebraische Function von x, sondern auch x als algebraische Function von y. In Folge des eben bewiesenen Satzes ist diese Function x rational ausdrückbar durch das Argument y und die in Beziehung auf y genommene Ableitung $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{z}$ von x. Da überdies z durch die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ bestimmt ist, so erhellt die Richtigkeit des Satzes:

Ist y eine algebraische Function der Veränderlichen x und $z = \frac{dy}{dx}$ die nach x genommene Ableitung derselben, so besteht zwischen je zweien der Veränderlichen x, y, z eine algebraische Gleichung, und durch irgend zwei dieser Veränderlichen lässt sich die dritte rational ausdrücken.

Wenn insbesondere y eine rationale Function von x ist, so erhält man als speciellen Fall des obigen Satzes:

Das Argument x einer rationalen Function y von x ist durch die Function y und deren in Bezug auf x genommene Ableitung $\frac{dy}{dx}$ rational ausdrückbar.

Zürich, im Juli 1875.

Zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Geiser* in Zürich.)

Das zuerst von Herrn *Kummer* gelöste und seither vielfach behandelte Problem: *„Die Discriminante der kubischen Gleichung, von welcher die Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades abhängen, in eine Summe von Quadraten zu zerlegen,“* ist bis jetzt mit wesentlich algebraischen Hülfsmitteln erledigt worden. Es ist aber auch möglich, die Frage von einer mehr geometrischen Seite aus anzufassen und einer wenigstens prinzipiellen Beantwortung entgegenzuführen, wenn auch zur vollkommenen Lösung derselben schliesslich analytische Entwickelungen angewendet werden müssen. Ohne also den Anspruch zu machen, neue Resultate zu liefern, wird vielleicht die nachfolgende Notiz doch einiges Interesse erwecken durch den Weg, auf welchem das bekannte Endziel erreicht wird.

I.

Der Tangentialkegel, welcher vom Punkte x, y, z aus dem Ellipsoid*)

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{b^2}+\frac{\mathfrak{z}^2}{c^2} = 1$$

umschrieben werden kann, genügt in seinen laufenden Coordinaten ξ, η, ζ der Gleichung

$$(1.)\quad \left\{\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}-1\right\}^2-\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right\}\left\{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right\} = 0.$$

Werden rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt, so hängen die Hauptaxen desselben von der kubischen Gleichung ab:

$$(2.)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\mathfrak{A}\lambda^2+\mathfrak{B}\lambda+\mathfrak{C} = 0,$$

wo zur Abkürzung folgende Bezeichnungen eingeführt sind:

$$(3.)\quad \begin{cases} a_{11} = -\dfrac{1}{a^2}\left\{\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right\}, & a_{23} = \dfrac{yz}{b^2c^2}, \\ a_{22} = -\dfrac{1}{b^2}\left\{\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{x^2}{a^2}-1\right\}, & a_{31} = \dfrac{zx}{c^2a^2}, \\ a_{33} = -\dfrac{1}{c^2}\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right\}, & a_{12} = \dfrac{xy}{a^2b^2}; \end{cases}$$

*) Wir brauchen die Bezeichnung Ellipsoid, obschon die nachfolgenden Formeln und Schlüsse ihre Gültigkeit für beliebige reelle Werthe von a^2, b^2, c^2 behalten.

$$(4.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\frac{1}{a^2b^2c^2}\{(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\} = -\frac{E_2}{a^2b^2c^2}, \\ \mathfrak{B} = -\frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right\}\{x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2)\} = -\frac{E_4E_0}{a^4b^4c^4}, \\ \mathfrak{C} = \frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right\}^2 = \frac{E_4^2}{a^6b^6c^6}. \end{cases}$$

Die Gleichung (1.) stellt dann einen Rotationskegel dar, wenn die kubische Gleichung (2.) eine Doppelwurzel hat, d. h. wenn deren Discriminante

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} 9\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\mathfrak{B} & -6\mathfrak{A}\mathfrak{C}+2\mathfrak{B}^2 \\ 6\mathfrak{B}+2\mathfrak{A}^2 & 9\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\mathfrak{B} \end{vmatrix} = -\frac{3E_4^2}{a^{12}b^{12}c^{12}}\{E_0^2E_2^2-4E_0^3E_4+4E_2^3-18E_0E_2E_4-27E_4^2\}$$

verschwindet *). Es ergiebt sich also zunächst der Satz:

Der Ort aller derjenigen Punkte, von denen aus einem Ellipsoid Rotationskegel umschrieben werden können, besteht aus dem doppelt gelegten Ellipsoide selbst und aus einer Fläche achten Grades, deren Gleichung nach der obigen Bezeichnung lautet

$$(6.)\quad F_8 = E_0^2E_2^2-4E_0^3E_4+4E_2^3-18E_0E_2E_4-27E_4^2 = 0.$$

II.

Soll ein dem Ellipsoid umschriebener Kegel zugleich Rotationskegel sein, so muss er den unendlich entfernten imaginären Kreis des Raumes berühren, seine Spitze muss sich also auf einer gemeinschaftlichen Tangentialebene dieses ausgezeichneten Kegelschnittes und des Ellipsoides befinden und zwar auf der Verbindungsgeraden der beiden Berührungspunkte. Sieht man von dem doppelt gelegten Ellipsoide ab, welches sich auch bei dieser Methode einstellt, so liefert demnach die Geometrie als Ort der Spitzen umschriebener Rotationskegel die gemeinschaftliche Developpable des Ellipsoides und des unendlich entfernten imaginären Kreises. Diese ist vom achten Grade und mit der Fläche $F_8 = 0$ identisch, so dass wir sofort die Eigenschaften der ersteren auf die letztere übertragen können. Die Developpable gehört dem Gesammtsystem von Flächen zweiten Grades an, welches mit dem Ellipsoide confocal ist, die Grössen a^2, b^2, c^2 treten also nur in den Verbindungen

$$(1.)\quad \begin{cases} b^2-c^2=\alpha, \quad c^2-a^2=\beta, \quad a^2-b^2=\gamma, \\ \qquad \text{wobei } \alpha+\beta+\gamma = 0 \text{ ist,} \end{cases}$$

---

*) Vergl. hierüber einen Aufsatz des Verfassers: „*Ueber die Fresnelsche Wellenfläche*“ in den Verhandlungen der schweiz. naturf. Gesellschaft in Frauenfeld, Jahresbericht 1871, pag. 178.

in den Ausdruck für F_8 ein. Man weiss ferner, dass die Hauptebenen des Ellipsoides so wie die unendlich entfernte Ebene des Raumes mit der Developpabeln jeweilen einen doppelt gelegten Kegelschnitt und vier Gerade gemein haben; unter Anwendung dieser Bemerkung ergiebt sich als Gleichung des Schnittes von F_8

$$(2.)\begin{cases} \text{mit } E_\infty: (x^2+y^2+z^2)^2(\alpha^2x^4+\beta^2y^4+\gamma^2z^4-2\beta\gamma y^2z^2-2\gamma\alpha z^2x^2-2\alpha\beta x^2y^2)=0, \\ \text{mit der } YZ\text{-Ebene}: (-\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma)^2(y^4+z^4+2y^2z^2-2\alpha y^2+2\alpha z^2+\alpha^2)=0, \\ \text{„ „ } ZX \text{ „ }: (-\gamma z^2+\alpha x^2-\gamma\alpha)^2(z^4+x^4+2z^2x^2-2\beta z^2+2\beta x^2+\beta^2)=0, \\ \text{„ „ } XY \text{ „ }: (-\alpha x^2+\beta y^2-\alpha\beta)^2(x^4+y^4+2x^2y^2-2\gamma x^2+2\gamma y^2+\gamma^2)=0; \end{cases}$$

da F_8 nur gerade Potenzen von x, y, z enthält, so ist es durch diese vier Gleichungen vollständig bestimmt, mit Ausnahme des Coefficienten von $x^2y^2z^2$, den man auf directem Wege findet als

$$(3.)\qquad c_{222} = 2(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$$

III.

Als nothwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung für die Realität des Rotationskegels tritt die doppelte Berührung mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise ein. Die Spitze befindet sich dann auf einem der Focalkegelschnitte des Ellipsoides, welche bekanntlich Doppelcurven von F_8 sind. Diese Focalkegelschnitte treten als einzige reelle Theile der Developpabeln auf, und es wird sich also die Gleichung der Fläche durch reelle Werthe von x, y, z nur dann erfüllen lassen, wenn eines der Gleichungspaare

$$(1.)\qquad \begin{cases} x=0, & -\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma=0; \\ y=0, & -\gamma z^2+\alpha x^2-\gamma\alpha=0; \\ z=0, & -\alpha x^2+\beta y^2-\alpha\beta=0, \end{cases}$$

gleichzeitig zutrifft. [Zwei derselben stellen reelle Kegelschnitte dar, während ein drittes nur durch imaginäre Werthe der Coordinaten befriedigt wird.] *Es muss sich demnach F_8 als eine Summe von Quadraten darstellen lassen,* von denen jedes einzelne verschwindet, wenn irgend eines der drei Gleichungspaare (1.) gilt. Die Grössen, deren Quadratsumme unter den angegebenen Bedingungen gleich Null sein soll, sind [insofern man von allfälligen Factoren x, y, z absieht] Functionen von höchstens dem zweiten Grade in x^2, y^2, z^2 so wie von α, β, γ und lassen sich in verschiedene Formen eintheilen.

Als Grössen von der Form Q bezeichnen wir solche, die keinen der

Factoren x, y, z enthalten. Was diejenigen Grössen anbetrifft, welche einen dieser Factoren enthalten, so erkennt man leicht, dass dieselben immer noch mindestens einen zweiten besitzen; wir bezeichnen diejenigen, welche durch yz, zx, xy, aber nicht durch $x.y.z$ theilbar sind, mit L. Die übrigbleibenden, durch xyz theilbaren nennen wir M, wenn sie noch weiter x, y, z enthalten, und wir nennen sie M', wenn dies nicht der Fall ist.

IV.

Eine Grösse Q, die jedesmal verschwindet, wenn eines der Gleichungspaare III, (1.) erfüllt ist, hat bis auf einen Zahlenfactor den Werth

$$(1.)\quad Q = \alpha x^4+\beta y^4+\gamma z^4+\alpha y^2z^2+\beta z^2x^2+\gamma x^2y^2+\alpha(\beta-\gamma)x^2+\beta(\gamma-\alpha)y^2+\gamma(\alpha-\beta)z^2-\alpha\beta\gamma,$$

wie man unter Benutzung der Methode findet, welche dazu dient, die Gleichung eines Hyperboloides aus dreien seiner Erzeugenden aufzustellen, die der nämlichen Schaar angehören, während man zur Reduction zugleich die Relation II, (1.) anwendet. Es können also alle Q in ein einziges zusammengezogen werden, dessen Zahlencoefficient dann der positiven Einheit gleich wird.

Die Grössen L erscheinen unter den Formen:

$$(2.)\quad \lambda_{1k}yz\{\alpha_{1k}x^2-\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma\},\ \lambda_{2k}zx\{\alpha x^2+\beta_{2k}y^2-\gamma z^2-\gamma\alpha\},\ \lambda_{3k}xy\{-\alpha x^2+\beta y^2+\gamma_{3k}z^2-\alpha\beta\},$$

die Grössen M unter den Formen:

$$(3.)\quad \mu_{1k}x^2yz,\quad \mu_{2k}xy^2z,\quad \mu_{3k}xyz^2$$

und endlich die Grössen M' unter der Form:

$$(4.)\quad \mu'_k xyz.$$

Hierbei sind die λ Zahlencoefficienten, die $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ lineare homogene Functionen der α, β, γ; da die μ'^2 vom dritten Grade in α, β, γ sein müssten, so folgt, dass Quadrate von der Form M' nicht vorkommen werden.

V.

Um jetzt eine Zerlegung von F_8 in eine Summe von Quadraten wirklich auszuführen, wollen wir die Voraussetzung machen, die sich durch den Erfolg rechtfertigen wird, es sei dies möglich, wenn von den drei Formen L und den drei Formen M jede nur einmal berücksichtigt werde. Es ist dann

$$(1.)\quad \begin{cases} F_8 = Q^2+[\lambda_1 yz(\alpha_1 x^2-\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma)]^2+(\mu_1 x^2yz)^2 \\ \qquad +[\lambda_2 zx(\alpha x^2+\beta_2 y^2-\gamma z^2-\gamma\alpha)]^2+(\mu_2 xy^2z)^2 \\ \qquad +[\lambda_3 xy(-\alpha x^2+\beta y^2+\gamma_3 z^2-\alpha\beta)]^2+(\mu_3 xyz^2)^2. \end{cases}$$

Da die Glieder höchsten Grades in der Entwickelung rechter Hand mit der linken Seite der ersten der Gleichungen II, (2.) übereinstimmen müssen, so findet man zunächst durch Vergleichung der Coefficienten von y^4z^4, z^4x^4, x^4y^4

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,$$

und indem man die Glieder mit $x^4y^2z^2$, $x^2y^4z^2$, $x^2y^2z^4$ benutzt:

$$\begin{aligned} 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 &= 4\alpha_1^2+8\alpha\beta_2-8\alpha\gamma_3+\mu_1^2 \\ &= -8\alpha_1\beta+4\beta_2^2+8\beta\gamma_3+\mu_2^2 \\ &= 8\alpha_1\gamma-8\beta_2\gamma+4\gamma_3^2+\mu_3^2, \end{aligned}$$

welche Gleichungen erfüllt werden, wenn man setzt:

$$\alpha_1 = \frac{\beta-\gamma}{2},\ \beta_2 = \frac{\gamma-\alpha}{2},\ \gamma_3 = \frac{\alpha-\beta}{2};\ \ \mu_1^2 = 15\alpha^2,\ \ \mu_2^2 = 15\beta^2,\ \ \mu_3^2 = 15\gamma^2.$$

Man überzeugt sich leicht, dass bei Annahme dieser Werthe die beiden Seiten der obigen Gleichung (1.) identisch werden, d. h., ***dass F_8 sich als die Summe von sieben Quadraten darstellen lässt:***

$$\text{(2.)}\qquad F_8 = Q^2+L_x^2+L_y^2+L_z^2+15M_x^2+15M_y^2+15M_z^2,$$

wo Q durch IV, (1.) bestimmt ist, während die L und M sich ergeben als

$$\text{(3.)}\quad \begin{cases} L_x = yz\{(\beta-\gamma)x^2-2\beta y^2+2\gamma z^2-2\beta\gamma\}; & M_x = \alpha x^2yz \\ L_y = zx\{2\alpha x^2+(\gamma-\alpha)y^2-2\gamma z^2-2\gamma\alpha\}; & M_y = \beta xy^2z \\ L_z = xy\{-2\alpha x^2+2\beta y^2+(\alpha-\beta)z^2-2\alpha\beta\}; & M_z = \gamma xyz^2. \end{cases}$$

VI.

Eine zweite Zerlegung findet man, indem man jede der Formen L zweimal, jede der Formen M einmal zulässt, also annimmt, es sei

$$\text{(1.)}\quad \begin{cases} F_8 = Q^2+[\lambda_{11}yz(\alpha_{11}x^2-\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma)]^2+[\lambda_{12}yz(\alpha_{12}x^2-\beta y^2+\gamma z^2-\beta\gamma)]^2+(\mu_1x^2yz)^2 \\ \qquad +[\lambda_{21}zx(\alpha x^2+\beta_{21}y^2-\gamma z^2-\gamma\alpha)]^2+[\lambda_{22}zx(\alpha x^2+\beta_{22}y^2-\gamma z^2-\gamma\alpha)]^2+(\mu_2xy^2z)^2 \\ \qquad +[\lambda_{31}xy(-\alpha x^2+\beta y^2+\gamma_{31}z^2-\alpha\beta)]^2+[\lambda_{32}xy(-\alpha x^2+\beta y^2+\gamma_{32}z^2-\alpha\beta)]^2+(\mu_3xy^2z)^2. \end{cases}$$

Die durch Coefficientenvergleichung sich ergebenden Relationen

$$\lambda_{11}^2+\lambda_{12}^2 = \lambda_{21}^2+\lambda_{22}^2 = \lambda_{31}^2+\lambda_{32}^2 = 4$$

werden am einfachsten erfüllt, wenn die λ^2 alle einander gleichgesetzt werden. Die Gleichungen zur Bestimmung der α_1, β_2, γ_3, μ sind dann

$$\begin{aligned} 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 &= 2(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2)+4\alpha(\beta_{21}+\beta_{22})-4\alpha(\gamma_{31}+\gamma_{32})+\mu_1^2 \\ &= -4(\alpha_{11}+\alpha_{12})\beta+2(\beta_{21}^2+\beta_{22}^2)+4\beta(\gamma_{31}+\gamma_{32})+\mu_2^2 \\ &= 4(\alpha_{11}+\alpha_{12})\gamma-4(\beta_{21}+\beta_{22})\gamma+2(\gamma_{31}^2+\gamma_{32}^2)+\mu_3^2. \end{aligned}$$

Sie werden befriedigt für

$$\alpha_{x} = \beta;\quad \alpha_{y} = -\gamma;\quad \beta_{x} = \gamma;\quad \beta_{z} = -\alpha;\quad \gamma_{x} = \alpha;\quad \gamma_{z} = -\beta;$$
$$\mu_1 = 14\alpha^2;\quad \mu_2 = 14\beta^2;\quad \mu_3 = 14\gamma^2.$$

Da hiermit zugleich die Gleichung (1.) zu einer identischen wird, *so ergiebt sich folgende Zerlegung in zehn Quadrate:*

$$(2.)\qquad F_4 = Q^2 + 14M_x^2 + 14M_y^2 + 14M_z^2$$
$$+ 2L_{1x}^2 + 2L_{1y}^2 + 2L_{1z}^2 + 2L_{2x}^2 + 2L_{2y}^2 + 2L_{2z}^2,$$

wo Q, M_x, M_y, M_z die nämliche Bedeutung haben wie in V. (2.), während die L gegeben sind durch die Werthe:

$$(3.)\quad \begin{cases} L_{1x} = yz(\beta x^2 - \beta y^2 + \gamma z^2 - \beta\gamma); & L_{2x} = yz(-\gamma x^2 - \beta y^2 + \gamma z^2 - \beta\gamma); \\ L_{1y} = zx(\alpha x^2 + \gamma y^2 - \gamma z^2 - \gamma\alpha); & L_{2y} = zx(\alpha x^2 - \alpha y^2 - \gamma z^2 - \gamma\alpha), \\ L_{1z} = xy(-\alpha x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2 - \alpha\beta); & L_{2z} = xy(-\alpha x^2 + \beta y^2 - \beta z^2 - \alpha\beta). \end{cases}$$

VII.

Um das in der Einleitung dieses Aufsatzes ausgesprochene Problem für eine beliebige centrale Fläche zweiten Grades

$$(1.)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = D$$

zu lösen, ist Δ, die negativ genommene Discriminante der in λ kubischen Gleichung

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

in eine Summe von Quadraten zu zerlegen. Dazu dienen die Gleichungen V. (2.) und VI. (2.), nachdem dieselben wegen I. (5.) noch mit $3\left(\frac{E_4}{a^4b^4c^4}\right)^2$ multiplicirt worden sind. Man hat nämlich nur in den so umgeformten Gleichungen x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy; a^2, b^2, c^2, α, β, γ durch ihre Werthe aus I, (3.) zu ersetzen, um sofort *Darstellungen von Δ als Summe von sieben, resp. zehn Quadraten* zu erhalten. Es bleibt uns also nur zu zeigen, dass diese Substitutionen keinerlei Irrationalitäten in die Q, L und M bringen.

Führt man abkürzend ein:

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta,\quad \begin{aligned} a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23} &= \Delta_1, \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31} &= \Delta_2, \\ a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12} &= \Delta_3, \end{aligned}\qquad \begin{aligned} \lambda &= \Delta_1 . \Delta_2 . \Delta_3, \\ \mu &= a_{23} . a_{31} . a_{12}, \end{aligned}$$

so findet man:

$$
(4.)\quad \begin{cases}
a^2 = \dfrac{\Delta_2.\Delta_3}{a_{31}a_{12}.\Delta}, & b^2 = \dfrac{\Delta_3.\Delta_1}{a_{12}a_{23}.\Delta}, \quad c^2 = \dfrac{\Delta_1.\Delta_2}{a_{23}a_{31}.\Delta}, \\[2mm]
\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{\Delta_2.\Delta_3}{a_{23}\Delta}, & \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{\Delta_3.\Delta_1}{a_{31}\Delta}, \quad \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{\Delta_1.\Delta_2}{a_{12}\Delta}, \\[2mm]
yz = \dfrac{\lambda\Delta_1}{\mu\Delta^2}, & zx = \dfrac{\lambda\Delta_2}{\mu\Delta^2}, \quad xy = \dfrac{\lambda\Delta_3}{\mu\Delta^2}, \\[2mm]
\alpha = \dfrac{\Delta_1\{a_{31}\Delta_3 - a_{12}\Delta_2\}}{\mu.\Delta}, & \beta = \dfrac{\Delta_2\{a_{12}\Delta_1 - a_{23}\Delta_3\}}{\mu.\Delta}, \quad \gamma = \dfrac{\Delta_3\{a_{23}\Delta_2 - a_{31}\Delta_1\}}{\mu\Delta}
\end{cases}
$$

und endlich den Multiplicator, der alle Q, L, M zu ganzen homogenen Functionen dritten Grades in den Coefficienten a der Gleichung (1.) macht:

$$
(5.)\quad \frac{E_4}{a^6 b^6 c^6} = \frac{\mu^3.\Delta^5}{\lambda^3}.
$$

Zürich, den 2. Januar 1876.

Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i./E.)

1. In meiner letzten Arbeit*) wurden die Systeme von Flächen n^{ter} Ordnung F^n und die Gewebe von Flächen n^{ter} Classe Φ^n definirt und nach Stufe und Grad unterschieden; insbesondere wurden die linearen F^n-Systeme und Φ^n-Gewebe in ihrem Zusammenhange mit der Polarentheorie untersucht. Dabei ergab sich u. A. der wichtige Satz, dass ein lineares Φ^n-Gewebe $N(n)-p^{\text{ter}}$ Stufe allemal auf einem linearen F^n-Systeme $p-1^{\text{ter}}$ Stufe ruht und durch dasselbe bestimmt ist, indem jede F^n des Systemes zu jeder Φ^n des Gewebes apolar ist.

Also mit einem linearen F^2-Systeme von r Dimensionen ist allemal ein lineares Φ^2-Gewebe von $8-r$ Dimensionen derartig verbunden, dass jede Φ^2 des Gewebes auf jede F^2 des Systemes sich stützt. Anderseits können die linearen F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe *gleicher* Stufe als reciproke Gebilde aufgefasst, und die projectivischen Eigenschaften der ersteren sofort auf die letzteren übertragen werden. Die Theorie dieser Flächenmannigfaltigkeiten wird dadurch wesentlich vereinfacht; sie wird noch übersichtlicher, wenn wir ihr gewisse Sätze über die singulären Flächen zweiten Grades vorausschicken.

2. *Singuläre* F^2 sind die Kegelflächen zweiter Ordnung oder F^2 mit einem Doppelpunkte, die Ebenenpaare oder F^2 mit einer Doppellinie, und die zweifachen Ebenen.

Singuläre Φ^2 sind die Curven zweiter Classe oder Φ^2 mit einer Doppelebene, die Punktenpaare oder Φ^2 mit einer Doppellinie, und die zweifachen Punkte.

Ein Ebenenpaar kann auch als singuläre Kegelfläche zweiter Ordnung, und eine zweifache Ebene als singuläres Ebenenpaar aufgefasst werden.

Es giebt im Raume dreifach unendlich viele Ebenen und Punkte, und folglich sechsfach unendlich viele Ebenenpaare und Punktenpaare.

*) Seite 1 dieses Bandes.

Da eine Kegelfläche zweiter Ordnung einen beliebigen Punkt zum Mittelpunkt haben kann und erst durch fünf ihrer Strahlen bestimmt ist, so giebt es achtfach unendlich viele Kegelflächen zweiter Ordnung und ebenso viele Curven zweiter Classe. Die verschiedenen Arten der singulären F^2 und Φ^2 bilden also Mannigfaltigkeiten von drei, sechs resp. acht Dimensionen.

Auch bezüglich des Grades dieser besonderen F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe fehlt es nicht an Hinweisen. Weil z. B. unter denjenigen F^2, welche durch sechs beliebige Punkte gehen, sich zehn Ebenenpaare befinden, so dürfen wir vermuthen, dass alle Ebenenpaare des Raumes ein F^2-System sechster Stufe zehnten Grades bilden, d. h. dass *jedes* lineare F^2-System dritter Stufe im Allgemeinen zehn Ebenenpaare enthält. Diese und ähnliche Vermuthungen finden wir bestätigt, wenn wir die Bedingungsgleichungen der singulären Flächen zweiter Ordnung oder Classe discutiren. Es empfiehlt sich jedoch, vorher einige specielle F^2-Systeme zweiten, dritten und höheren Grades zu besprechen, auf welche wir bei jener Discussion sofort stossen werden.

§. 1. Ueber einige specielle F^2-Systeme niedrigen Grades.

3. Wir bezeichnen mit $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ die zehn homogenen Coordinaten einer F^2 und mit $a_{ik} = a_{ki}$ diejenigen einer Φ^2, indem wir die Gleichungen dieser Flächen schreiben:

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 + 2\alpha_{13}x_1x_3 + \cdots + 2\alpha_{34}x_3x_4 + \alpha_{44}x_4^2 = 0$$

und

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + \cdots + 2a_{34}\xi_3\xi_4 + a_{44}\xi_4^2 = 0.$$

Ferner seien A_l, B_m, C_n, D_p lineare homogene Functionen der α_{ik}. Im Uebrigen wollen wir die Bezeichnungen der oben erwähnten Arbeit beibehalten.

Die allgemeine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den zehn F^2-Coordinaten α_{ik} enthält:

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+9)}{1.2.3\ldots9} = \nu$$

Coefficienten, und das allgemeine F^2-System achter Stufe n^{ten} Grades hängt folglich von $\nu - 1$ Parametern ab, z. B. von 54 Parametern, wenn $n = 2$ ist. Da nun jede lineare Form A_l, B_m, C_n der α_{ik} nur zehn Coefficienten zählt, so hängt die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0,$$

wie leicht zu erkennen, nur von 37 Parametern ab und repräsentirt ein specielles quadratisches F^2-System achter Stufe. Dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, dass es zwei Reihen von linearen F^2-Systemen siebenter Stufe enthält, ähnlich wie das einschalige Hyperboloid zwei Schaaren von Geraden. Die Gleichungen:

$$\lambda A_1 + \mu B_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda A_2 + \mu B_2 = 0,$$

in welchen λ und μ willkürliche Parameter bezeichnen, repräsentiren die eine dieser beiden Reihen, und die Gleichungen:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0$$

die andere. — Ist $A_2 = B_1$, so werden die beiden Reihen von F^2-Systemen siebenter Stufe identisch und letztere haben ein lineares F^2-System sechster Stufe mit einander gemein; zugleich specialisirt sich das quadratische F^2-System achter Stufe auf analoge Art, wie ein Hyperboloid, wenn es in eine Kegelfläche zweiter Ordnung übergeht.

4. Aus den beiden quadratischen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_1 A_3 \\ B_1 B_3 \end{vmatrix} = 0$$

folgt entweder die Doppelgleichung:

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3$$

oder das Paar von linearen Gleichungen:

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad B_1 = 0.$$

Die beiden quadratischen Gleichungen repräsentiren zusammen ein biquadratisches F^2-System siebenter Stufe, welches in ein lineares und ein kubisches zerfällt, und:

Die Doppelgleichung:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} \quad \textit{oder} \quad \left\| \begin{matrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

repräsentirt ein kubisches F^2-System siebenter Stufe.

Dasselbe ist der kubischen Raumcurve vergleichbar. Es liegt in jedem quadratischen F^2-System achter Stufe, welches durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt werden kann, und es ist leicht zu beweisen, dass je zwei dieser quadratischen Systeme sich nicht nur in dem kubischen, sondern ausserdem in einem linearen F^2-Systeme siebenter Stufe durchdringen.

5. Aus den Gleichungen:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_4 \\ B_1 & B_4 \end{vmatrix} = 0,$$

welche zusammen (4.) ein F^2-System sechster Stufe sechsten Grades darstellen, folgt die dreifache Gleichung:

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = A_4 : B_4,$$

wenn nicht $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ und zugleich $A_2 B_3 - A_3 B_2 = 0$ ist. Die letzteren drei Gleichungen repräsentiren ein quadratisches F^2-System sechster Stufe, und in dieses und ein biquadratisches zerfällt demnach das F^2-System sechster Stufe sechsten Grades. Also:

Die dreifache Gleichung:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4} \quad \textit{oder} \quad \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{Vmatrix} = 0$$

repräsentirt ein biquadratisches F^2-System sechster Stufe.

Dasselbe kann durch ein lineares F^2-System fünfter Stufe beschrieben werden, dessen Gleichungen die Form haben:

$$\lambda A_i + \mu B_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Auf dieselbe Art lässt sich der Beweis führen, dass die $(r-1)$-fache Gleichung:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_r}{B_r} \quad \text{oder} \quad \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ B_1 & B_2 & \dots & B_r \end{Vmatrix} = 0$$

ein F^2-System $(10-r)^{\text{ter}}$ Stufe r^{ten} Grades repräsentirt.

6. Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

repräsentirt ein kubisches F^2-System achter Stufe, welches doppelt unendlich viele lineare F^2-Systeme sechster Stufe enthält. Die drei linearen Gleichungen:

$$\lambda A_i + \mu B_i + \nu C_i = 0, \quad \text{worin} \quad i = 1, 2, 3,$$

repräsentiren ein solches lineares System, wenn den willkürlichen Para-

metern λ, μ, ν bestimmte Werthe ertheilt werden. Man kann diese linearen Gleichungen geradezu als Gleichungen des kubischen Systemes auffassen; denn dieses wird von dem linearen Systeme sechster Stufe beschrieben, wenn λ, μ und ν nach und nach alle möglichen Werthe durchlaufen.

Das kubische F^2-System achter Stufe ist der Fläche dritter Ordnung vergleichbar. Wie diese doppelt unendlich viele Raumcurven dritter Ordnung enthält, so enthält jenes alle kubischen F^2-Systeme siebenter Stufe, welche durch die Doppelgleichung:

$$\left\| \begin{matrix} A_1+\lambda C_1 & A_2+\lambda C_2 & A_3+\lambda C_3 \\ B_1+\mu C_1 & B_2+\mu C_2 & B_3+\mu C_3 \end{matrix} \right\| = 0$$

dargestellt werden können.

7. Aus den beiden kubischen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_4 \end{vmatrix} = 0$$

folgt, dass

$$\text{entweder} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad \text{oder} \quad \left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

ist*). Denn schreiben wir jene Gleichungen in der Form:

$$(B_1 C_2) A_3 + (C_1 A_2) B_3 + (A_1 B_2) C_3 = 0$$

und

$$(B_1 C_2) A_4 + (C_1 A_2) B_4 + (A_1 B_2) C_4 = 0, \quad \text{worin} \quad (B_1 C_2) = B_1 C_2 - C_1 B_2, \quad \text{etc.}$$

und fügen wir hinzu die identischen Gleichungen:

$$(B_1 C_2) A_1 + (C_1 A_2) B_1 + (A_1 B_2) C_1 = 0$$

und

$$(B_1 C_2) A_2 + (C_1 A_2) B_2 + (A_1 B_2) C_2 = 0,$$

so ergiebt sich hieraus, wenn die zweizeiligen Determinanten $(B_1 C_2)$, $(C_1 A_2)$ und $(A_1 B_2) = A_1 B_2 - B_1 A_2$ nicht alle drei verschwinden, durch Elimination derselben, dass auch $\Sigma \pm A_1 B_3 C_4$ und $\Sigma \pm A_2 B_3 C_4$ Null sein müssen.

Das F^2-System siebenter Stufe neunten Grades, welches durch die obigen beiden kubischen Gleichungen dargestellt wird, zerfällt demnach in

---

*) Die letzte dieser Gleichungen bedeutet, dass jede aus drei Verticalreihen ihrer linken Seite gebildete Determinante verschwindet.

das durch die Doppelgleichung $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$ repräsentirte kubische System siebenter Stufe (4.) und ein System siebenter Stufe sechsten Grades. Also:

Die Doppelgleichung:

$$\left\|\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix}\right\| = 0$$

repräsentirt ein F^2-System siebenter Stufe sechsten Grades.

Dasselbe enthält alle linearen F^2-Systeme fünfter Stufe, welche durch die vier Gleichungen:

$$\lambda A_i + \mu B_i + \nu C_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

dargestellt werden, und diese vier linearen Gleichungen repräsentiren geradezu das F^2-System siebenter Stufe sechsten Grades, wenn die Parameter λ, μ, ν beliebig veränderlich sind.

§. 2. Die Systeme und Gewebe der singulären Flächen zweiten Grades.

8. Ist ein Punkt p Doppelpunkt einer F^2, so sind ihm alle Punkte des Raumes conjugirt bezüglich dieser Fläche, und die F^2-Coordinaten α_{ik} müssen deshalb den vier linearen Bedingungsgleichungen genügen:

$$\alpha_{i1}p_1 + \alpha_{i2}p_2 + \alpha_{i3}p_3 + \alpha_{i4}p_4 = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Daraus folgt ohne Weiteres die erste Hälfte des Doppelsatzes:

Alle Flächen zweiter Ordnung, die einen gegebenen Punkt p zum Doppelpunkt haben, bilden ein lineares F^2-System fünfter Stufe.

Alle Flächen zweiter Classe, die eine gegebene Ebene zur Doppelebene haben, bilden ein lineares Φ^2-Gewebe fünfter Stufe.

Die zweite Hälfte ergiebt sich aus der ersten mit Hülfe des Principes der Reciprocität.

Für alle F^2 des Raumes, die einen Doppelpunkt besitzen, ergiebt sich durch Elimination der Punktcoordinaten p_1, p_2, p_3, p_4 die bekannte Bedingungsgleichung:

$$\Delta = 0, \quad \text{worin} \quad \Delta = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}$$

die Discriminante der F^2-Gleichung bezeichnet. Also:

Alle Kegelflächen zweiter Ordnung bilden ein F^2-System achter Stufe vierten Grades.

Alle Curven zweiter Classe bilden ein Φ^2-Gewebe achter Stufe vierten Grades.

9. Seien a, b, c die Eckpunkte eines Dreiecks; dann liegt p in der Ebene desselben, wenn

$$p_j = \lambda a_j + \mu b_j + \nu c_j \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

gesetzt wird und λ, μ, ν willkürliche Constanten bezeichnen. Die Gleichungen $\alpha_{i1}p_1 + \alpha_{i2}p_2 + \alpha_{i3}p_3 + \alpha_{i4}p_4 = 0$ gehen durch diese Werthe der Doppelpunkts-Coordinaten p_j über in vier Gleichungen von der Form:

$$\lambda A_i + \mu B_i + \nu C_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

worin A_i, B_i und $C_i = \alpha_{i1}c_1 + \alpha_{i2}c_2 + \alpha_{i3}c_3 + \alpha_{i4}c_4$ lineare homogene Functionen der Flächencoordinaten α_{ik} bezeichnen. Daraus folgt (7.):

Alle Flächen zweiter Ordnung, die in einer gegebenen Ebene einen Doppelpunkt haben, bilden ein F^2-System siebenter Stufe sechsten Grades.

Alle Curven zweiter Classe, deren Ebenen durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden ein Φ^2-Gewebe siebenter Stufe sechsten Grades.

Liegt der Doppelpunkt p einer F^2 mit zwei gegebenen Punkten a und b in einer Geraden, so wird $p_j = \lambda a_j + \mu b_j$ und die vier Bedingungsgleichungen für die F^2-Coordinaten nehmen die Form an:

$$\lambda . A_i + \mu . B_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

woraus durch Elimination von λ und μ folgt:

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = A_4 : B_4.$$

Also (5.):

Alle Flächen zweiter Ordnung, die in einer gegebenen Geraden einen Doppelpunkt haben, bilden ein F^2-System sechster Stufe vierten Grades.

Alle Curven zweiter Classe, deren Ebenen durch eine gegebene Gerade gehen, bilden ein Φ^2-Gewebe sechster Stufe vierten Grades.

10. Eine F^2 hat zwei Doppelpunkte p und q, zerfällt also in zwei Ebenen, die sich in der Doppellinie $\overline{pq}$ schneiden, wenn die Gleichungen: $\alpha_{i1}p_1 + \alpha_{i2}p_2 + \alpha_{i3}p_3 + \alpha_{i4}p_4 = 0$ und $\alpha_{i1}q_1 + \alpha_{i2}q_2 + \alpha_{i3}q_3 + \alpha_{i4}q_4 = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$ erfüllt sind. Aus sieben dieser Gleichungen folgt übrigens die achte; denn durch Elimination von p_1, p_2, p_3, p_4 aus den ersten vier Gleichungen ergiebt sich, dass die Discriminante $\Delta = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{44}$ verschwindet, und dieses ist die Bedingung dafür, dass eine der Gleichungen $\alpha_{i1}q_1 + \alpha_{i2}q_2 + \alpha_{i3}q_3 + \alpha_{i4}q_4 = 0$ aus den drei übrigen folgt. Die obigen acht Bedingungsgleichungen für die α_{ik} reduciren sich demnach auf sieben; d. h.:

Alle Ebenenpaare, die eine gegebene Gerade zur Doppellinie haben, bilden ein lineares F^2-System zweiter Stufe.

Alle Punktenpaare, die auf einer gegebenen Geraden liegen, bilden ein lineares Φ^2-Gewebe zweiter Stufe.

11. Die Bedingungsgleichungen dieses linearen F^2-Systemes zweiter Stufe können, wenn p_1 von Null verschieden ist, u. A. auf folgende Form gebracht werden:

$\alpha_{i1}p_1+\alpha_{i2}p_2+\alpha_{i3}p_3+\alpha_{i4}p_4=0$ und $\alpha_{i2}(p_1q_2-q_1p_2)+\alpha_{i3}(p_1q_3-q_1p_3)+\alpha_{i4}(p_1q_4-q_1p_4)=0$.

Lassen wir die letzte dieser acht Gleichungen fort (10.) und eliminiren die q_j aus den übrigen, so erhalten wir für die Coordinaten α_{ik} derjenigen Ebenenpaare, deren Doppellinien durch p gehen, die fünf Gleichungen:

$$\alpha_{i1}p_1+\alpha_{i2}p_2+\alpha_{i3}p_3+\alpha_{i4}p_4=0 \text{ für } i=1,2,3,4 \text{ und } \begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\end{vmatrix}=0; \text{ d. h.:}$$

Alle Ebenenpaare, deren Doppellinien durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden ein F^2-System vierter Stufe dritten Grades.

Alle Punktenpaare, die in einer gegebenen Ebene liegen, bilden ein Φ^2-Gewebe vierter Stufe dritten Grades.

An Stelle der letzten Gleichung kann irgend eine andere gesetzt werden, welche ausdrückt, dass eine erste Unterdeterminante der Discriminante Δ verschwindet, und dieses *muss* geschehen, wenn p_1 oder p_4 Null ist, weil alsdann jene letzte Gleichung eine Folge der vier übrigen ist. Ueberhaupt ergiebt sich hier ohne Weiteres der bekannte umkehrbare Satz:

Wenn eine Fläche zweiter Ordnung in Ebenen zerfällt, so verschwinden alle ersten Minoren ihrer Discriminante Δ.

12. Liegt der Punkt p auf einer Geraden $\overline{ab}$, so ist $p_j=\lambda a_j+\mu b_j$ zu setzen; die letzten fünf Gleichungen gehen dadurch über in:

$\lambda(\alpha_{i1}a_1+\alpha_{i2}a_2+\alpha_{i3}a_3+\alpha_{i4}a_4)+\mu(\alpha_{i1}b_1+\alpha_{i2}b_2+\alpha_{i3}b_3+\alpha_{i4}b_4)=0$ für $i=1,2,3,4$ und

$$\begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\end{vmatrix}=0.$$

Diese fünf Gleichungen repräsentiren ein F^2-System fünfter Stufe zwölften Grades, weil (5. und 9.) die ersten vier ein F^2-System sechster Stufe vierten Grades darstellen. Damit eine beliebige Fläche jenes Systemes fünfter Stufe in zwei Ebenen zerfalle, ist jedoch erforderlich, dass die fünfte Gleichung keine blosse Folge der vier übrigen ist (11.). Es darf also weder $\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{b_1}{a_1}$ noch $\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{b_4}{a_4}$ sein; denn die obige fünfte Gleichung folgt

sowohl aus den vier Gleichungen:

$$\alpha_{i2}(a_2 b_1 - b_2 a_1) + \alpha_{i3}(a_3 b_1 - b_3 a_1) + \alpha_{i4}(a_4 b_1 - b_4 a_1) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

als auch aus den vier linearen Gleichungen:

$$\alpha_{i1}(a_1 b_4 - b_1 a_4) + \alpha_{i2}(a_2 b_4 - b_2 a_4) + \alpha_{i3}(a_3 b_4 - b_3 a_4) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Von dem F^2-System fünfter Stufe zwölften Grades sind deshalb zwei lineare F^2-Systeme fünfter Stufe auszuscheiden, sodass sich ergiebt:

Alle Ebenenpaare, deren Doppellinien eine gegebene Gerade ab schneiden, bilden ein F^2-System fünfter Stufe zehnten Grades.

Alle Punktenpaare, deren Verbindungslinien eine gegebene Gerade schneiden, bilden ein Φ^2-Gewebe fünfter Stufe zehnten Grades.

13. Die Gleichungen:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{matrix} \right\| = 0 \quad \text{und} \quad \left| \begin{matrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{matrix} \right| = 0$$

repräsentiren (7.) ein F^2-System sechster Stufe achtzehnten Grades, welchem (11.) alle Ebenenpaare des Raumes angehören. Ihnen geschieht (weil $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) Genüge, wenn entweder

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{matrix} \right\| = 0, \quad \text{oder} \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{matrix} \right\| = 0$$

ist, oder aber wenn *alle* ersten Minoren der Discriminante $\varDelta$ verschwinden. Denn wenn die ersten beiden Fälle nicht eintreten, so folgt aus den beiden Gleichungen:

$$\left| \begin{matrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{matrix} \right| \equiv \left| \begin{matrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{matrix} \right| = 0 \quad \text{und} \quad \left| \begin{matrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{matrix} \right| = 0,$$

von welchen die erstere in der obigen Doppelgleichung enthalten ist, dass auch:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{matrix} \right\| = 0$$

sein muss (vgl. 7.), und aus der Verbindung dieser Doppelgleichung mit der obigen folgt ebenso, dass alle ersten Minoren von $\varDelta$ verschwinden.



Das F^2-System sechster Stufe achtzehnten Grades zerfällt also in zwei biquadratische, welche durch die beiden dreifachen Gleichungen:

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{31}} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{32}} = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}} = \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{34}} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{23}} = \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{24}}$$

dargestellt werden (5.), und ein System zehnten Grades; und nur das letztere wird dargestellt durch das Verschwinden aller ersten Minoren der Discriminante Δ. Also (vgl. 2.):

Alle Ebenenpaare des Raumes bilden ein F^2–System sechster Stufe zehnten Grades.

Alle Punktenpaare des Raumes bilden ein Φ^2–Gewebe sechster Stufe zehnten Grades.

14. Wenn eine Fläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen zerfällt, von welchen die eine durch die Schnittlinie der Coordinatenebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ geht, so kann ihre Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) . (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_4 x_4) = 0.$$

Für ihre Coordinaten α_{ik} erhalten wir dann die Ausdrücke:

$$\alpha_{11} = \lambda_1 \mu_1, \quad \alpha_{22} = \lambda_2 \mu_2, \quad 2\alpha_{13} = \lambda_1 \mu_3, \quad 2\alpha_{23} = \lambda_2 \mu_3, \quad 2\alpha_{12} = \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1,$$
$$\alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{44} = 0, \quad 2\alpha_{14} = \lambda_1 \mu_4, \quad 2\alpha_{24} = \lambda_2 \mu_4, \quad 2\alpha_{34} = 0,$$

woraus sich durch Elimination der sechs willkürlichen Constanten λ und μ die fünf Gleichungen ergeben:

$$\alpha_{33} = 0, \; \alpha_{34} = 0, \; \alpha_{44} = 0, \; \alpha_{14} \alpha_{23} = \alpha_{13} \alpha_{24} \; \text{und} \; \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{22} - 2\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{14} + \alpha_{24} \alpha_{23} \alpha_{11} = 0,$$

jedoch die letzte nur dann, wenn weder μ_3 noch μ_4 verschwindet. Diese fünf Gleichungen repräsentiren ein F^2-System vierter Stufe sechsten Grades, welches die beiden linearen Systeme vierter Stufe:

$$(\alpha_{33} = \alpha_{34} = \alpha_{44} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0) \quad \text{und} \quad (\alpha_{33} = \alpha_{34} = \alpha_{44} = \alpha_{14} = \alpha_{24} = 0)$$

enthält; letztere aber sind auszuschliessen, weil in Folge ihrer Gleichungen μ_3 resp. μ_4 verschwindet. Daraus, und weil die Schnittlinie der Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ als eine beliebige Gerade des Raumes anzusehen ist, schliessen wir:

Alle Ebenenpaare, von denen eine Ebene durch eine gegebene Gerade geht, bilden ein F^2–System vierter Stufe vierten Grades.

Alle Punktenpaare, von denen ein Punkt in einer gegebenen Geraden liegt, bilden ein Φ^2–Gewebe vierter Stufe vierten Grades.

Dieser Satz und ein früherer (11.) sind leicht zu merken, wenn man sich erinnert, dass vier beliebige Punkte auf vier Ebenenpaaren liegen, die zugleich eine gegebene Gerade enthalten, und auf drei Ebenenpaaren, deren

Doppellinien durch einen gegebenen Punkt gehen. Aehnliches gilt von den meisten Sätzen dieses Paragraphen.

15. Für die zweifachen Ebenen und die zweifachen Punkte ergeben sich ohne Schwierigkeit die nachstehenden Sätze, deren Beweis weiter unten folgen wird, und die wir hier nur übersichtlich zusammenstellen:

Die zweifachen Ebenen des Raumes bilden ein F^2-System dritter Stufe achten Grades (26.). *Alle durch einen Punkt gehenden zweifachen Ebenen bilden ein F^2-System zweiter Stufe vierten Grades* (20.). *Alle durch eine Gerade gehenden zweifachen Ebenen bilden ein F^2-System erster Stufe zweiten Grades* (16.).

Die zweifachen Punkte des Raumes bilden ein Φ^2-Gewebe dritter Stufe achten Grades. Alle in einer Ebene liegenden zweifachen Punkte bilden ein Φ^2-Gewebe zweiter Stufe vierten Grades. Alle auf einer Geraden liegenden zweifachen Punkte bilden ein Φ^2 - Gewebe erster Stufe zweiten Grades.

§ 3. Das lineare F^2-System achter Stufe und die Fläche zweiter Classe.

16. Das lineare F^2-System achter Stufe enthält unendlich viele Flächen, welche sich auf zweifache Ebenen reduciren; und zwar ist der Ort dieser Ebenen eine Fläche zweiter Classe Φ^2, welche auch auf alle übrigen F^2 des Systemes sich stützt. Aus der Gleichung:

$$c_{11}\alpha_{11}+2c_{12}\alpha_{12}+c_{22}\alpha_{22}+2c_{13}\alpha_{13}+\cdots+2c_{34}\alpha_{34}+c_{44}\alpha_{44} = 0$$

des F^2-Systemes erhält man diejenige dieser Φ^2, wenn man für die zehn F^2-Coordinaten α_{ik} die Werthe $\xi_i\xi_k$ einsetzt; die Coefficienten c_{ik} jener Gleichung sind demnach die homogenen Coordinaten dieser Φ^2, und das F^2-System ist durch die Φ^2 völlig bestimmt.

Die F^2-Coordinaten α_{ik} repräsentiren ein Ebenenpaar (ξ, η), wenn $2\alpha_{ik} = \xi_i\eta_k+\xi_k\eta_i$ ist, für i und $k = 1, 2, 3, 4$. Setzt man diese Werthe in die obige Bedingungsgleichung ein, so erkennt man sofort, dass die Ebenen ξ und η einander in Bezug auf Φ^2 conjugirt sind; und umgekehrt:

Je zwei conjugirte Ebenen von Φ^2 bilden ein Ebenenpaar des linearen F^2-Systemes achter Stufe.

Dieser Satz kann als Specialfall des folgenden, an anderer Stelle *) bewiesenen aufgefasst werden:

Alle Flächen zweiter Ordnung, welche den Poltetraedern der Φ^2 um-

---

*) Dieses Journal Bd. 78, S. 345.

schrieben werden können, gehören zu dem linearen F^2-Systeme achter Stufe, auf welches Φ^2 sich stützt.

17. Die Theorie des linearen F^2-Systemes achter Stufe ist demnach identisch mit der erweiterten Polarentheorie der Fläche zweiter Classe Φ^2, und wir können uns hier darauf beschränken, einige weiterhin benutzte Sätze aufzustellen. Die sonst recht umständlichen Beweise dieser Sätze vereinfachen sich sehr, wenn man beachtet, dass einem linearen F^2-Systeme alle F^2-Büschel, F^2-Bündel, F^2-Gebüsche u. s. w. angehören, die durch 2, 3, 4, ... seiner Flächen bestimmt werden.

Wenn von den drei Paar Gegenflächen eines Vierkants irgend zwei aus conjugirten Ebenen einer Φ^2 bestehen, so gilt Dasselbe von dem dritten Paare; denn jede dem Vierkant umschriebene F^2 stützt die Φ^2, weil sie dem durch die zwei Paar conjugirten Ebenen bestimmten F^2-Büschel angehört.

Wenn aus einer Geraden g drei Eckpunkte eines Tetraeders durch Ebenen projicirt werden, welche den resp. gegenüberliegenden Tetraederflächen bezüglich einer Φ^2 conjugirt sind, so gilt Dasselbe von dem vierten Eckpunkte; denn überhaupt stützt sich Φ^2 auf jede F^2, welche durch g und die vier Eckpunkte des Tetraeders geht. Die Gerade g nennen wir *conjugirt zu dem Tetraeder in Bezug auf* Φ^2.

Wenn bezüglich einer Φ^2 vier von den sechs Ebenen, durch welche die Kanten eines Tetraeders $ABCD$ aus einem Punkte E projicirt werden, denjenigen Ebenen conjugirt sind, welche ihre resp. Gegenkanten mit einem Punkte F verbinden, so gilt Dasselbe von den übrigen beiden Ebenen*). Denn jede dem Sechseck $ABCDEF$ umschriebene F^2 stützt die Φ^2, weil sie dem F^2-Gebüsch angehört, welches durch die ersten vier Paare conjugirter Ebenen bestimmt ist. Wir nennen das Sechseck ein *Polsechseck der* Φ^2, weil von seinen zwanzig Flächen jede den Pol der gegenüberliegenden Fläche enthält.

Wenn von einem einfachen räumlichen Fünfeck drei auf einander folgende Kanten ihren resp. Gegenflächen bezüglich einer Φ^2 conjugirt sind, so enthält jede Kante und jede Diagonale desselben den Pol der ihr gegenüberliegenden Fläche resp. Diagonal-Ebene, und das Fünfeck ist ein *Pol-*

*) In meiner Arbeit über Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme (dieses Journal Bd. 77 S. 282) stellte ich in *einem* Falle eine Ausnahme von diesem Satze als möglich hin. Der obige Beweis lehrt, dass diese Ausnahme niemals wirklich eintritt; die zur Construction von F a. a. O. benutzte Kegelfläche II. O. schneidet also nicht, sondern berührt in F die Gerade l.

fünfeck der Φ^2. Denn jede durch die fünf Eckpunkte gehende F^2 stützt die Φ^2 (vgl. die Beweise der vorhergehenden Sätze).

18. Zwei beliebigen Poltetraedern einer Φ^2 können doppelt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung umschrieben werden, oder ihre acht Eckpunkte bilden die Knotenpunkte eines F^2-Bündels (*Hesse*). Alle F^2 nämlich, welche einem Poltetraeder von Φ^2 umschrieben sind, bilden ein lineares F^2-System fünfter Stufe, und da alle derartig bestimmten F^2-Systeme dem linearen Systeme achter Stufe angehören, auf welchem die Φ^2 ruht, so haben sie paarweise ein lineares F^2-System zweiter Stufe, d. h. einen F^2-Bündel, mit einander gemein.

Einem Poltetraeder und einem beliebigen Polfünfeck von Φ^2 kann eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species $C^{2,2}$, und zwei beliebigen Polfünfecken oder einem Poltetraeder und einem Polsechseck kann im Allgemeinen *eine* Fläche zweiter Ordnung umschrieben werden. Der Beweis ist dem soeben geführten ganz analog.

Wenn drei linear unabhängige und folglich (17.) alle Flächen II. Ordnung, die durch eine gegebene Raumcurve dritter Ordnung k^3 gehen, eine Φ^2 stützen, so können der k^3 unendlich viele Polsechsecke, Polfünfecke und Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben werden. Nämlich jene drei Flächen bestimmen mit einer beliebigen zu Φ^2 apolaren, aber nicht durch k^3 gehenden F^2 ein F^2-Gebüsch, dessen sämmtliche Flächen durch die sechs Schnittpunkte von k^3 und dieser F^2 gehen und die Φ^2 stützen; die sechs Schnittpunkte bilden folglich ein der k^3 eingeschriebenes Polsechseck von Φ^2 (17.). Zwei in Bezug auf Φ^2 conjugirte Ebenen z. B. schneiden die k^3 in den sechs Punkten eines solchen Polsechsecks; woraus leicht sich ergiebt, dass fünf von den Eckpunkten desselben willkürlich auf k^3 angenommen werden dürfen. Zwei beliebige Punkte A, B von k^3 bilden mit je drei andern Curvenpunkten C, D, E, deren Verbindungsebene der Geraden $\overline{AB}$ conjugirt ist in Bezug auf Φ^2, ein Polfünfeck von Φ^2; denn die Punkte A, B, C, D, E bilden mit *jedem* sechsten Punkte von k^3 ein Polsechseck von Φ^2, oder mit anderen Worten, alle durch sie gehenden Flächen zweiter Ordnung sind apolar zu Φ^2. Ebenso beweist man, dass ein beliebiger Punkt A von k^3 mit den drei Punkten, in welchen k^3 von der Polarebene des Punktes A bezüglich der Φ^2 geschnitten wird, ein Poltetraeder von Φ^2 bildet. — Aus dem Allen ergiebt sich:

Wenn eine Raumcurve dritter Ordnung irgend einem Poltetraeder, Pol-

fünfeck oder Polsechseck einer Φ^2 umschrieben ist, so können ihr unendlich viele solche Pol-n-ecke von Φ^2 eingeschrieben werden. Die Raumcurve mag deshalb eine „kubische Polcurve von Φ^2“ genannt werden.

Solcher Polcurven von Φ^2 giebt es siebenfach unendlich viele; durch jeden Punkt gehen fünffach unendlich viele derselben, jedem Poltetraeder von Φ^2 sind doppelt unendlich viele, einem beliebigen Tetraeder des Raumes sind einfach unendlich viele derselben umschrieben*). Ist Φ^2 insbesondere eine Curve zweiter Classe, so geht jede ihrer kubischen Polcurven durch die Eckpunkte eines ihrer Poldreiecke, und es giebt in diesem Falle neunfach unendlich viele solche Polcurven.

19. Das lineare F^2-System achter Stufe ist ein specielles, wenn die Φ^2, welche auf ihm ruht, eine singuläre Φ^2 ist, d. h. eine Curve zweiter Classe oder ein Punktenpaar oder ein zweifacher Punkt. Also alle Flächen zweiter Ordnung, welche den Poldreiecken einer Curve zweiter Classe umschrieben werden können, oder in Bezug auf welche zwei gegebene Punkte einander conjugirt sind, oder aber welche durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden ein *specielles* lineares F^2-System achter Stufe. In Bezug auf die singuläre Φ^2 ist einer sie enthaltenden Ebene jede beliebige Ebene des Raumes conjugirt; jene Ebene stützt die Φ^2, und jeder Punkt des Raumes kann als ihr Pol bezüglich der Φ^2 betrachtet werden. Ist Φ^2 ein Punktenpaar AA', so gehen alle Flächen des F^2-Systemes achter Stufe, welche einen Punkt P der Geraden $\overline{AA'}$ enthalten, zugleich durch denjenigen Punkt von $\overline{AA'}$, welcher durch A und A' harmonisch von P getrennt ist; und alle durch A gehenden Flächen des Systemes werden von $\overline{AA'}$ in A berührt, falls sie nicht A zum Doppelpunkt haben.

§ 4. Das lineare F^2-System siebenter Stufe und die Φ^2-Schaar.

20. Das lineare F^2-System siebenter Stufe stützt eine Φ^2-Schaar (1.) und ist durch zwei beliebige Flächen derselben bestimmt (vgl. 16.). Seine zweifachen Ebenen sind identisch mit den gemeinschaftlichen Berührungs-Ebenen der Schaar (16.), und durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen demnach im Allgemeinen vier derselben. Jede Ebene α gehört unendlich vielen Ebenenpaaren des Systemes an; die anderen Ebenen dieser Paare schneiden sich im Allgemeinen in einer Geraden, welche zu α conjugirt ist bezüglich aller Φ^2 der Schaar. Allen Ebenen des Raumes sind

*) Vgl. dieses Journal, Bd. 77, S. 283.

bezüglich der Φ^2-Schaar bekanntlich*) die Geraden eines tetraedralen Strahlencomplexes zweiten Grades conjugirt.

21. Eine beliebige Gerade ist im Allgemeinen von *einem* Ebenenpaare des F^2-Systemes siebenter Stufe die Doppellinie (10.); die Ebenen dieses Paares sind einander conjugirt bezüglich aller Flächen der Φ^2-Schaar. Jede von den ∞^2 Geraden, in welchen die zweifachen Ebenen des Systemes sich paarweise schneiden, ist Doppellinie von unendlich vielen Ebenenpaaren des Systemes; die Ebenen dieser Paare sind durch die zugehörigen beiden zweifachen Ebenen harmonisch getrennt. Durch jeden Punkt gehen (20.) vier von den zweifachen Ebenen, also sechs Schnittlinien derselben. Jede Gerade, welche auf einer Fläche der Φ^2-Schaar enthalten ist, ist Schnittlinie von zwei gemeinschaftlichen Berührungsebenen der Schaar, weil jede der beiden Berührungsebenen, welche durch sie an eine andere Φ^2 der Schaar gelegt werden können, auch alle übrigen Φ^2 tangirt. Da ferner eine beliebige Ebene von einer Φ^2 der Schaar berührt wird und im Allgemeinen zwei Gerade derselben enthält, so ergiebt sich:

Die Geraden der Φ^2-Schaar sind identisch mit den Schnittlinien aller zweifachen Ebenen des linearen F^2-Systemes siebenter Stufe; sie bilden ein Strahlensystem sechster Ordnung zweiter Classe.

22. Die Φ^2-Schaar enthält im Allgemeinen vier Curven zweiter Classe (8.), und das lineare F^2-System siebenter Stufe besteht aus allen F^2, welche ausser einer dieser vier Curven noch irgend eine andere Φ^2 der Schaar stützen. Der Curvenebene sind deshalb hinsichtlich der Φ^2-Schaar alle Ebenen conjugirt, welche durch ihren Pol bezüglich irgend einer Φ^2 der Schaar gehen (vgl. 19.); und zwar liegt dieser Pol in den Ebenen der drei übrigen Curven, weil auch diese Ebenen zu der ersteren conjugirt sind. Mit anderen Worten:

Die Ebenen der vier singulären Φ^2 bilden ein gemeinschaftliches Poltetraeder aller Φ^2 der Schaar. Im linearen F^2-System siebenter Stufe giebt es im Allgemeinen vier Ebenen, von welchen jede mit allen Ebenen, welche durch den Schnittpunkt der drei übrigen gehen, Ebenenpaare des Systemes bildet.

In jeder dieser vier Ebenen liegen unendlich viele Schnittlinien von zweifachen Ebenen des F^2-Systemes; dieselben tangiren die in der Ebene liegende singuläre Φ^2 der Schaar (21.).

---

*) Vgl. meine Geometrie der Lage, II. Abth.

23. Durch fünf beliebige Punkte geht ein F^2-Bündel des linearen F^2-Systemes siebenter Stufe; eine beliebige Gerade g kann folglich mit zwei Punkten A, B durch doppelt unendlich viele Flächen des Systemes verbunden werden, und zwar schneiden sich dieselben in noch zwei Punkten C und D. Durch die vier Punkte A, B, C, D aber geht ein F^2-Gebüsch des Systemes; sind E und F die Schnittpunkte von g mit einer beliebigen F^2 desselben, so besteht das Gebüsch, da es durch diese F^2 und irgend drei durch g, A und B gehende F^2 bestimmt ist, aus allen dem Sechseck A, B, C, D, E, F umschriebenen Flächen zweiter Ordnung. Dieses Sechseck ist folglich ein gemeinschaftliches Polsechseck aller Flächen der Φ^2-Schaar (17.), und die ihm umschriebene Raumcurve dritter Ordnung ist gemeinschaftliche Polcurve aller dieser Φ^2. Also:

Ein Polsechseck der Φ^2-Schaar ist im Allgemeinen völlig bestimmt, wenn zwei Eckpunkte A, B und eine zu $\overline{AB}$ windschiefe Kante g desselben beliebig angenommen werden.

Durch zwei beliebige Punkte A, B gehen unendlich viele kubische Polcurven der Φ^2-Schaar; eine beliebige Gerade g bestimmt als Sehne im Allgemeinen eine derselben.

Alle durch eine dieser Polcurven gehenden F^2 gehören zu dem linearen F^2-Systeme siebenter Stufe, und jede andere F^2 des Systemes schneidet die Polcurve in den sechs Punkten eines Polsechsecks der Φ^2-Schaar; denn diese F^2 bestimmt mit irgend drei durch die Polcurve gehenden F^2 ein dem Systeme angehörendes F^2-Gebüsch, dessen Flächen sämmtlich dem Sechseck umschrieben sind (vgl. 18.). Einer kubischen Polcurve der Φ^2-Schaar können demnach unendlich viele Polsechsecke der Schaar eingeschrieben werden, auch wenn drei Eckpunkte A, B, C derselben willkürlich auf der Polcurve angenommen werden; die Ebenen der jedesmaligen anderen drei Eckpunkte schneiden sich in der zur Ebene ABC conjugirten Geraden.

Durch drei beliebige Punkte A, B, C des Raumes geht allemal eine, und im Allgemeinen nur eine kubische Polcurve der Φ^2-Schaar.

Man denke sich nämlich die Schaar durch zwei ihrer Flächen Φ^2 und Φ_1^2 gegeben, und durch die Pole der Ebene ABC bezüglich derselben eine Ebene α gelegt. Dann giebt es in α unendlich viele Dreiecke, welche mit A, B und C zusammen Polsechsecke von Φ^2 bilden, und zwar sind dieselben beliebige Poldreiecke eines in α liegenden, durch A, B, C und

Φ^2 bestimmten Polarsystemes*). Durch A, B, C und die Flächen Φ^2 und Φ_1^2 werden also in der Ebene α zwei verschiedene Polarsysteme bestimmt, welche im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Poldreieck besitzen; dasselbe bildet mit A, B, C ein Polsechseck der Φ^2-Schaar. Umschreibt man diesem Polsechseck eine (allemal reelle) Raumcurve dritter Ordnung, so hat man die durch A, B, C gehende kubische Polcurve der Φ^2-Schaar.

24. Die Kanten aller Polfünfecke der Φ^2-Schaar gehören dem vorhin (20.) erwähnten tetraedralen Strahlencomplexe zweiten Grades an, denn sie sind den ihnen gegenüberliegenden Fünfecksflächen conjugirt bezüglich der Φ^2-Schaar.

Einer kubischen Polcurve der Φ^2-Schaar können unendlich viele Polfünfecke der Schaar eingeschrieben werden; jeder Punkt P der Curve ist Eckpunkt von im Allgemeinen einem derselben.

Nämlich auf dem Complexkegel, welcher P zum Mittelpunkte hat, liegen im Allgemeinen vier andere Punkte Q der Polcurve, und diejenige Ebene, welche zu einem der vier Complexstrahlen $\overline{PQ}$ conjugirt ist bezüglich der Φ^2-Schaar, schneidet die Polcurve in drei Punkten, welche mit den beiden Curvenpunkten P, Q des Complexstrahles zusammen ein Poltetraeder der Φ^2-Schaar bilden (18.) und deshalb mit den übrigen drei Q identisch sein müssen.

Durch die zehn Eckpunkte von zwei Polfünfecken der Φ^2-Schaar kann eine Raumcurve $C^{2.2}$ vierter Ordnung gelegt werden.

Denn alle einem Polfünfeck umschriebenen F^2 bilden ein lineares F^2-System vierter Stufe, und zwei solche Systeme vierter Stufe müssen einen F^2-Büschel mit einander gemein haben, weil beide dem Systeme siebenter Stufe angehören. Ganz ähnlich wird der Satz bewiesen:

Die Eckpunkte eines Polfünfecks können mit denjenigen des Poltetraeders der Φ^2-Schaar durch eine Raumcurve dritter Ordnung und mit denjenigen eines Polsechsecks der Schaar durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden.

In der Raumcurve dritter Ordnung schneiden sich u. A. die Kegelflächen des tetraedralen Complexes, welche die Eckpunkte des Polfünfecks zu Mittelpunkten haben. Je zwei Punkte dieser kubischen Polcurve sind Eckpunkte eines der Curve eingeschriebenen Polfünfecks der Φ^2-Schaar.

Jede kubische Polcurve der Φ^2-Schaar enthält vier Poldreiecke der vier singulären Flächen der Schaar (18.).

*) Dieses Journal Bd. 77 S. 281.

Wenn umgekehrt eine Raumcurve dritter Ordnung von irgend zwei dieser singulären Φ^2 je ein Poldreieck (d. h. Tripel conjugirter Punkte) enthält, so ist sie eine kubische Polcurve der Φ^2-Schaar.

25. Das lineare F^2-System siebenter Stufe ist ein specielles und das gemeinschaftliche Poltetraeder der Φ^2-Schaar artet aus, wenn die Flächen der Schaar sich in einzelnen oder in unendlich vielen Punkten berühren, oder wenn eine oder einzelne derselben in Punktenpaare zerfallen oder sich auf zweifache Punkte reduciren. Z. B. alle F^2, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, oder eine gegebene Gerade in einem ihrer Punkte berühren, oder von welchen zwei Paare conjugirter Punkte gegeben sind, bilden ein specielles lineares F^2-System siebenter Stufe. Es würde zu weit führen, wenn wir alle möglichen Specialfälle aufzählen wollten.

§ 5. Das lineare F^2-System sechster Stufe und die Φ^2-Schaarschaar *).

26. Das lineare F^2-System sechster Stufe stützt eine Φ^2-Schaarschaar und ist durch diese bestimmt. Seine zweifachen Ebenen sind gemeinschaftliche Berührungsebenen aller Flächen der Schaarschaar (16.); es giebt ihrer folglich im Allgemeinen acht, von welchen jede durch die sieben übrigen bestimmt ist. — Durch sechs beliebige Punkte geht im Allgemeinen *eine* F^2 des Systemes; dieselbe zerfällt in zwei Ebenen (α, β), wenn die sechs Punkte in einer Ebene α liegen. Also:

Eine beliebige Ebene α gehört im Allgemeinen einem Ebenenpaare des linearen F^2-Systemes sechster Stufe an; ihre Pole bezüglich aller Flächen der zugehörigen Φ^2-Schaarschaar liegen in der zweiten Ebene dieses Paares.

Eine Ausnahme machen diejenigen Ebenen, in welchen die singulären Flächen der Schaarschaar liegen, und von denen (9.) im Allgemeinen sechs durch jeden Punkt gehen; denkt man sich nämlich die Schaarschaar bestimmt durch drei ihrer Φ^2, von denen eine singulär, d. h. eine Curve zweiter Classe ist, so leuchtet ein (19, 20.), dass die Curvenebene allen Ebenen einer Geraden conjugirt ist, auf welcher ihre Pole bezüglich der sämmtlichen Φ^2 liegen. Also:

Die Ebenen aller singulären Flächen der Φ^2-Schaarschaar bilden einen Ebenenbüschel Γ^6 sechster Ordnung; jede von ihnen ist bezüglich der Schaarschaar einer Geraden conjugirt, mit deren Ebenen sie unendlich viele Ebenenpaare des linearen F^2-Systemes sechster Stufe bildet.

*) Man vergl. Herrn *Sturms* „Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung" (oder den F^2-Bündel) in diesem Journal Bd. 70.

Zu Γ^6 gehören die vier Ebenen des gemeinschaftlichen Poltetraeders von je zwei Flächen der Schaarschaar.

27. Dreht sich um die Gerade g, welche einer beliebigen Ebene α des Büschels Γ^6 conjugirt ist, eine Ebene α_1, so beschreiben deren Pole in Bezug auf irgend drei Flächen der Schaarschaar drei in α liegende projectivische Punktreihen. Im Allgemeinen kommt deshalb die Ebene α_1 dreimal in solche Lage, dass ihre Pole in einer Geraden liegen*); d. h. es gehen durch g im Allgemeinen drei Ebenen von Γ^6, und deren conjugirte Gerade liegen in α. Wir wollen g eine ***Doppelaxe von*** Γ^6 nennen, und erhalten den Satz:

Bezüglich der Φ^2-Schaarschaar ist jeder Ebene α des Büschels Γ^6 eine Doppelaxe g desselben conjugirt. Durch jede Doppelaxe g gehen im Allgemeinen drei Ebenen α_1 von Γ^6, und in jeder Ebene α des Büschels Γ^6 liegen im Allgemeinen drei Doppelaxen g_1 desselben.

Die Φ^2-Schaarschaar ist u. A. durch die drei singulären Φ^2 bestimmt, deren Ebenen α_1 durch eine beliebige Doppelaxe g gehen. Die Pole von g bezüglich dieser drei Curven zweiter Classe bilden demnach dasjenige Dreieck, dessen Seiten die den drei α_1 conjugirten Doppelaxen g_1 sind; und zwar liegt jeder Eckpunkt des Dreiecks auf *der* Ebene α_1, welche der ihm gegenüberliegenden Seite conjugirt ist.

28. Wenn von zwei Ebenen, die bezüglich der Φ^2-Schaarschaar einander conjugirt sind, die eine um einen beliebigen Punkt P sich dreht, so umhüllt die andere eine Φ^3; denn die Pole aller Ebenen von P in Bezug auf drei Flächen der Schaarschaar sind homologe Punkte von drei collinearen Ebenen, und letztere erzeugen die Φ^3. Da nun jeder Ebene, welche P mit einer Doppelaxe von Γ^6 verbindet, eine Ebene von Γ^6 conjugirt ist, so ergiebt sich:

Die Ebenen des Büschels Γ^6 berühren jede Fläche dritter Classe, deren Tangentialebenen den Ebenen eines Punktes P conjugirt sind.

Zwei solche Φ^3 haben ausser Γ^6 noch einen Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ^3 mit einander gemein; denn wenn von den zwei conjugirten Ebenen die eine sich um zwei Punkte, d. h. um eine Gerade l dreht, so beschreibt die andere, da sie die Pole der ersteren verbindet, im Allgemeinen einen Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ^3.

*) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, S. 7.

Mit einer beliebigen jener Φ^3 hat nun Γ^3 neun Ebenen gemein; eine derselben ist der Verbindungsebene des zugehörigen Punktes P und der Geraden l conjugirt, jede der übrigen acht dagegen ist einer Ebene von P und einer anderen Ebene von l und folglich der Schnittlinie g von zwei Ebenen conjugirt bezüglich der Schaarschaar. Daraus folgt:

Eine beliebige Gerade l schneidet im Allgemeinen acht Doppelaxen des Ebenenbüschels Γ^6; die Doppelaxen von Γ^6 liegen demnach auf einer Fläche achter Ordnung, welche zugleich den gemeinschaftlichen Poltetraedern von je zwei Flächen der Schaarschaar umschrieben ist.

Diese geradlinige F^8 wird von jeder Ebene des Büschels Γ^6 dreifach berührt; sie schneidet sich selbst in einer Raumcurve, welche mit jeder Doppelaxe sechs und mit jeder Ebene von Γ^6 achtzehn Punkte gemein hat (27.).

29. Eine Φ^2 der Schaarschaar ist im Allgemeinen bestimmt, wenn zwei ihrer Berührungsebenen willkürlich angenommen werden. Bilden nun diese beiden Ebenen irgend ein Ebenenpaar des linearen F^2-Systemes sechster Stufe, so sind sie einander auch hinsichtlich jener Φ^2 conjugirt, und ihre Pole bezüglich der Φ^2 liegen folglich auf ihrer Schnittlinie, sodass letztere mit ihrer eigenen Polare zusammenfällt. Mit anderen Worten:

Die Doppellinien aller Ebenenpaare des linearen F^2-Systemes sechster Stufe liegen auf den Flächen der zugehörigen Φ^2-Schaarschaar.

Wenn umgekehrt eine Gerade auf einer dieser Flächen liegt, so gehen durch sie zwei Ebenen, welche einander in Bezug auf noch zwei beliebige Φ^2 der Schaarschaar conjugirt sind (21.) und folglich ein Ebenenpaar des F^2-Systemes bilden.

30. Das lineare F^2-System sechster Stufe enthält unendlich viele Ebenenpaare, deren Doppellinien durch einen gegebenen Punkt P gehen. Alle diese Ebenenpaare umhüllen eine Kegelfläche dritter Classe (28.) und ihre Doppellinien liegen auf einer Kegelfläche dritter Ordnung; und zwar ist letztere die Tripel- oder Kernfläche der doppelt unendlich vielen (8.) Flächen des Systemes, welche P zum Doppelpunkte haben. Daraus folgt:

Die Geraden aller Flächen der Schaarschaar bilden einen Strahlencomplex dritten Grades.

Zu diesem Complexe gehören alle Strahlen der acht zweifachen Ebenen des F^2-Systemes; die 28 Schnittlinien dieser acht Ebenen sind Doppelstrahlen des Complexes. Auch die Tangenten jeder singulären Fläche der Schaarschaar sind Complexstrahlen; die Doppelebene dieser Fläche enthält ausser-

dem einen zum Complexe gehörigen Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt auf der ihr conjugirten Doppelaxe von Γ^6 liegt.

Man erhält alle in einer beliebigen Ebene liegenden Complexstrahlen, wenn man von allen die Ebene berührenden Flächen der Schaarschaar die übrigen gemeinschaftlichen Berührungsebenen construirt und mit der gegebenen zum Durchschnitt bringt (vgl. 21.). Auch aus dieser Construction ergiebt sich, dass der Strahlencomplex vom dritten Grade ist; denn durch jeden Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen drei jener Schnittlinien.

31. Bilden die Punkte A, B, C ein Poldreieck von irgend einer singulären Φ^2 der Schaarschaar, so geht durch dieselben eine Raumcurve dritter Ordnung, welche zugleich von zwei beliebigen anderen (23.) und folglich von allen Flächen der Schaarschaar eine Polcurve ist. Also:

Es giebt dreifach unendlich viele kubische Polcurven der Φ^2-Schaarschaar; jede von ihnen schneidet die Ebenen der singulären Φ^2 in Poldreiecken dieser Curven zweiter Classe (18.).

Da eine beliebige dieser Polcurven von jedem Ebenenpaar des linearen F^2-Systemes sechster Stufe in einem Polsechseck der Schaarschaar geschnitten wird, und drei Eckpunkte eines solchen Sechsecks beliebig auf der Polcurve angenommen werden können, so ergiebt sich ferner:

Es giebt sechsfach unendlich viele Polsechsecke der Φ^2-Schaarschaar; dieselben sind den kubischen Polcurven eingeschrieben.

Wird irgend eine der kubischen Polcurven von einer Doppelaxe des Büschels Γ^6 in zwei Punkten P, Q geschnitten, so kann ihr ein Polfünfeck der Φ^2-Schaarschaar eingeschrieben werden, von welchem P und Q zwei Eckpunkte sind; diejenige Ebene nämlich, welche der Doppelaxe conjugirt ist bezüglich der Schaarschaar, schneidet die Polcurve in den übrigen drei Eckpunkten (18.). Die zehn Flächen des Polfünfecks sind Ebenen, und die zehn Kanten sind Doppelaxen des Büschels Γ^6; die fünf Eckpunkte sind folglich vierfache Punkte des geometrischen Ortes F^8 aller Doppelaxen.

32. ***Wenn die Φ^2-Schaarschaar ein Polfünfeck besitzt, so ist jede Doppelaxe von Γ^6 Kante eines Polfünfecks der Schaarschaar.***

Denn jenem ersten Polfünfeck kann eine Raumcurve dritter Ordnung umschrieben werden, welche eine beliebige Doppelaxe von Γ^6 zweimal schneidet; und da diese Curve eine kubische Polcurve der Schaarschaar ist, so ist der Satz bewiesen (31.). Es lässt sich zeigen, dass diese Polcurve allen Polfünfecken der Schaarschaar umschrieben ist, dass sie also

alle Doppelaxen von Γ^6 zweimal schneidet und eine vierfache Linie des Ortes F^8 dieser Doppelaxen ist.

Im Allgemeinen nun ist keineswegs jede Doppelaxe von Γ^6 die Kante eines Polfünfecks der Schaarschaar; denn ist $ABCD$ das gemeinschaftliche Poltetraeder von irgend zwei Flächen der Schaarschaar und sind seine Kanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einander conjugirt bezüglich irgend einer dritten Fläche derselben, so sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ Doppelaxen von Γ^6; aber nur, wenn auch $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ einander conjugirt sind bezüglich der dritten Φ^2, sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ Kanten eines Polfünfecks der Schaarschaar. Daraus folgt:

Drei beliebige Flächen zweiter Classe haben im Allgemeinen kein Polfünfeck mit einander gemein.

33. Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, und wurde auch von mir übersehen *), dass hiernach die ersten Polaren aller durch einen Punkt S gehenden Ebenen bezüglich einer Φ^3 eine *specielle* Φ^2-Schaarschaar bilden. Denn es giebt **) unendlich viele Fünfecke, welche mit S zusammen Polsechsecke der Φ^3 bilden, also Polfünfecke aller jener ersten Polaren sind; und die Doppelaxen des zugehörigen Ebenenbüschels sechster Ordnung Γ^6 schneiden sich nicht, wie im allgemeinen Falle, paarweise in den Punkten einer Raumcurve achtzehnter Ordnung (28.), sondern zu vieren auf einer durch S gehenden Raumcurve dritter Ordnung.

Die Φ^2-Schaarschaar ist u. A. dann eine specielle, wenn einzelne ihrer Flächen sich auf Punktenpaare oder auf zweifache Punkte reduciren, wenn ihre Flächen von allen Ebenen eines Ebenenbüschels erster, zweiter oder dritter Ordnung berührt werden, oder wenn sie sich in einzelnen Punkten gegenseitig berühren. Demnach bilden z. B. alle F^2, welche durch drei gegebene Punkte gehen oder eine Ebene in einem gegebenen Punkte berühren, oder von welchen drei Paare conjugirter Punkte willkürlich angenommen sind, ein specielles F^2-System sechster Stufe. Selbst dasjenige System ist kein allgemeines, von dessen acht zweifachen Ebenen irgend vier durch einen Punkt gehen oder irgend zwei zusammenfallen.

§ 6. Das lineare F^2-System fünfter Stufe und das lineare Φ^2-Gewebe dritter Stufe.

34. Das lineare F^2-System fünfter Stufe stützt ein lineares Φ^2-Gewebe dritter Stufe und ist durch vier linear unabhängige Flächen desselben

*) Dieses Journal, Bd. 77, S. 287, vorletzer Absatz.
**) Dieses Journal, Bd. 78, S. 117.

bestimmt. Es enthält im Allgemeinen keine zweifachen Ebenen, dagegen doppelt unendlich viele Ebenenpaare, von deren Ebenen je vier durch eine beliebige Gerade gehen (14.). Also:

Die Ebenenpaare des linearen F^2-Systemes fünfter Stufe umhüllen eine Fläche vierter Classe Φ^4; sie bestehen aus je zwei Ebenen, welche bezüglich aller Flächen des zugehörigen Φ^2-Gewebes dritter Stufe einander conjugirt sind. Die Fläche Φ^4 ist zugleich der Ort aller Ebenen, in welchen die singulären Φ^2 des Gewebes liegen (vgl. 26. und 9.).

Man nennt Φ^4 die *Kernfläche* des linearen Φ^2-Gewebes dritter Stufe; zu ihren Berührungsebenen gehören die Flächen des gemeinschaftlichen Poltetraeders von je zwei Φ^2 des Gewebes.

Das lineare Φ^2-Gewebe dritter Stufe enthält im Allgemeinen zehn Punktenpaare (13.); also:

Es giebt im Allgemeinen zehn Paare P, P' von Punkten, die einander bezüglich aller Flächen des linearen F^2-Systemes fünfter Stufe conjugirt und insbesondere durch jedes Ebenenpaar des Systemes harmonisch getrennt sind. Die zehn Verbindungslinien $\overline{PP'}$ dieser Punktenpaare liegen auf der Kernfläche Φ^4;

denn jede durch eine $\overline{PP'}$ gehende Ebene enthält eine singuläre Φ^2 des Gewebes, nämlich eben das Punktenpaar P, P'.

35. Alle F^2 des Systemes, welche einen beliebigen Punkt zum Doppelpunkt haben, bilden einen Büschel concentrischer Kegelflächen (8.), sodass im Allgemeinen drei derselben Ebenenpaare sind (vgl. 11.). Alle Φ^2 des Gewebes, welche eine beliebige Ebene α berühren, bilden eine Schaarschaar und berühren noch sieben andere Ebenen β; durch jede in α liegende Doppellinie eines Ebenenpaares des F^2-Systemes geht eine von den sieben Ebenen β, und zwar ist dieselbe durch das Ebenenpaar harmonisch von α getrennt. Da bezüglich der Schaarschaar je zwei durch α und eine β harmonisch getrennte Ebenen einander conjugirt sind, so ist leicht umgekehrt zu beweisen, dass in jeder der sieben Geraden $\overline{\alpha\beta}$ zwei hinsichtlich des Φ^2-Gewebes conjugirte Ebenen sich schneiden. Daraus folgt:

Die Doppellinien aller Ebenenpaare des linearen F^2-Systemes fünfter Stufe bilden ein Strahlensystem dritter Ordnung siebenter Classe. Jede derselben liegt auf einer Schaar von Φ^2 des linearen Gewebes dritter Stufe.

Zugleich ergiebt sich der Doppelsatz:

Alle Ebenenpaare, deren Doppellinien in einer gegebenen Ebene liegen, bilden ein F^2-System vierter Stufe siebenten Grades.

Alle Punktenpaare, deren Verbindungslinien durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden ein Φ^2-Gewebe vierter Stufe siebenten Grades.

36. Das Φ^2-Gewebe dritter Stufe ist bestimmt durch eines seiner zehn Punktenpaare PP' und drei beliebige andere von seinen Flächen, und letztere bestimmen für sich allein eine Schaarschaar des Gewebes. Nun ist aber P Mittelpunkt einer Kegelfläche dritter Ordnung, deren Strahlen auf den Flächen der Schaarschaar liegen (30.), und in jedem dieser Strahlen schneiden sich zwei Ebenen, die bezüglich der Schaarschaar (29.) und folglich auch bezüglich des Gewebes einander conjugirt sind. Sind unter den vier Φ^2, durch welche wir uns das Gewebe bestimmt denken, zwei Punktenpaare PP' und QQ', so gehen durch die Gerade $\overline{PQ}$ zwei Ebenen, welche (21.) bezüglich der übrigen beiden Φ^2, also auch bezüglich des Gewebes einander conjugirt sind. Hieraus ergiebt sich:

Dem Strahlensysteme dritter Ordnung siebenter Classe gehören zwanzig Kegelflächen dritter Ordnung an, deren Mittelpunkte die zehn Punktenpaare PP' des Φ^2-Gewebes sind. Jede dieser Kegelflächen geht durch die achtzehn Punkte der neun Paare, welchen ihr Mittelpunkt nicht angehört.

37. Die zehn Punktenpaare PP' sind die (reellen oder imaginären) Ordnungspunkte von zehn involutorischen Punktreihen, die in den Geraden $\overline{PP'}$ liegen, und jede Fläche des linearen F^2-Systemes fünfter Stufe, die einen Punkt dieser zehn Punktreihen enthält, geht auch durch den zugeordneten Punkt. Die Gerade $\overline{PP'}$ liegt deshalb auf jeder F^2 des Systemes, welche durch zwei einander nicht zugeordnete Punkte der Geraden geht.

Wenn nun das Φ^2-Gewebe ein Polsechseck besitzt, so gehören alle diesem Sechseck umschriebenen F^2 dem Systeme an. Durch zwei beliebige Punkte von $\overline{PP'}$ aber gehen unendlich viele dieser F^2; dieselben schneiden sich in $\overline{PP'}$ und in der kubischen Polcurve des Φ^2-Gewebes, welche dem Polsechseck umschrieben werden kann, und $\overline{PP'}$ schneidet diese Polcurve zweimal. Die Punkte P und P' sind einander conjugirt bezüglich aller durch die Polcurve gehenden F^2, also auch bezüglich der Polcurve selbst. Letztere wird von jeder nicht durch sie gehenden F^2 des Systemes in einem Polsechseck des Gewebes geschnitten. Insbesondere ergiebt sich:

Wenn eine kubische Polcurve des linearen Φ^2-Gewebes dritter Stufe

existirt, so liegen die zehn Punktenpaare PP' auf zehn Secanten derselben und ihre Punkte sind einander bezüglich dieser Polcurve conjugirt.

38. Daraus folgt u. A. der bekannte Satz, dass zwei beliebige Raumcurven dritter Ordnung, die nicht auf einer und derselben F^2 liegen, zehn gemeinschaftliche Secanten haben. Legt man nämlich durch jede von ihnen drei F^2 beliebig hindurch, so bestimmen diese sechs F^2 ein lineares F^2-System fünfter Stufe. Auf dieses aber stützt sich ein lineares Φ^2-Gewebe dritter Stufe, von welchem die beiden Raumcurven zwei kubische Polcurven sind, und die zehn Punktenpaare PP' des Gewebes liegen auf zehn gemeinschaftlichen Secanten dieser Polcurven. Jede gemeinschaftliche Secante hat mit den Polcurven und mit den Flächen des F^2-Systemes je zwei zugeordnete Punkte einer involutorischen Punktreihe gemein, deren Ordnungspunkte ein Punktenpaar PP' des Gewebes bilden.

Ein lineares Φ^2-Gewebe dritter Stufe ist hiernach durch zwei kubische Polcurven, die nicht auf einer F^2 liegen, völlig bestimmt.

Wir behaupten aber auch, dass ein lineares Φ^2-Gewebe dritter Stufe im Allgemeinen zwei Polcurven dritter Ordnung besitzt, wenngleich dem folgenden Beweise die Annahme zu Grunde liegt, dass von den zehn Geraden $\overline{PP'}$ irgend fünf reell seien.

39. Das Φ^2-Gewebe sei gegeben durch vier seiner Punktenpaare, oder besser noch durch vier $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$, $\overline{SS'}$ von den zehn involutorischen Punktreihen, deren Ordnungspunkte von seinen zehn Punktenpaaren gebildet werden. Dann handelt es sich darum, zwei Raumcurven dritter Ordnung nachzuweisen, welche je zwei zugeordnete Punkte dieser vier Punktreihen enthalten; denn diese beiden Raumcurven sind die gesuchten Polcurven des Gewebes. — Wir können nun die Verbindungslinie $\overline{TT'}$ irgend eines fünften Punktenpaares des Gewebes sowohl mit $\overline{PP'}$ als auch mit $\overline{QQ'}$ durch einen Flächenbüschel des linearen F^2-Systemes fünfter Stufe verbinden. Durch jeden Punkt von $\overline{RR'}$ gehen zwei F^2 dieser beiden Büschel und schneiden sich in $\overline{TT'}$ und einer Raumcurve dritter Ordnung, welche je zwei zugeordnete Punkte der drei Punktreihen $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$ enthält. Mit $\overline{TT'}$ und ihrer Secante $\overline{RR'}$ kann die Raumcurve durch eine F^2 des Systemes verbunden werden, und alle auf die angegebene Weise construirten Raumcurven dritter Ordnung liegen folglich auf den Flächen des F^2-Büschels, welcher dem F^2-Systeme fünfter Stufe angehört und durch die Geraden $\overline{TT'}$ und $\overline{RR'}$ geht.

Die Knotenlinie dieses F^2-Büschels wird von den Geraden $\overline{TT'}$, $\overline{RR'}$ und zwei sie schneidenden Geraden u, v gebildet, und da die ersteren zwei Secanten der Raumcurven sind, so haben die Geraden u, v mit jeder der Raumcurven einen Punkt gemein. Daraus aber folgt, dass die beiden F^2-Büschel des Systemes, welche $\overline{TT'}$ mit $\overline{PP'}$ resp. $\overline{QQ'}$ verbinden, durch die Raumcurven dritter Ordnung projectivisch auf einander bezogen sind, indem beide zu den Punktreihen u und v perspectivisch sind. Alle jene Raumcurven liegen folglich auf einer Fläche vierter Ordnung, welche mit $\overline{SS'}$ im Allgemeinen vier Punkte gemein hat. Aber diejenige von den Raumcurven, welche durch einen dieser vier Punkte geht, muss auch den zugeordneten Punkt von $\overline{SS'}$ enthalten (37.).

Es giebt also wirklich im Allgemeinen zwei Raumcurven dritter Ordnung, welche je zwei zugeordnete Punkte der vier involutorischen Punktreihen $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$, $\overline{SS'}$ enthalten; oder:

Das lineare Φ^2-Gewebe dritter Stufe hat im Allgemeinen zwei kubische Polcurven; auf den zehn gemeinschaftlichen Secanten derselben liegen die zehn Punktenpaare des Gewebes. Jede dieser Polcurven wird von den doppelt unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, welche durch die andere gehen, in Polsechsecken des Gewebes geschnitten. Die Ebenen dieser ∞^2 Polsechsecke umhüllen die Kernfläche Φ^4 des Gewebes, und alle den Polsechsecken umschriebenen F^2 stützen das Gewebe und bilden ein lineares F^2-System fünfter Stufe.

Die Kernfläche Φ^4 kann auch definirt werden als Ort einer Ebene, welche die beiden kubischen Polcurven des Φ^2-Gewebes in sechs Punkten eines Kegelschnittes trifft.

40. Das lineare Φ^2-Gewebe dritter Stufe ist schon dann ein specielles, wenn irgend fünf von den Verbindungslinien seiner zehn Punktenpaare PP' eine beliebige Gerade schneiden oder wenn seine beiden kubischen Polcurven einen Punkt mit einander gemein haben; denn in diesen Fällen können die beiden Polcurven durch eine F^3 verbunden werden, was im Allgemeinen nicht möglich ist. Liegen die beiden Polcurven auf einer F^2, so reichen sie nicht einmal aus zur Bestimmung des Φ^2-Gewebes (vgl. 38.); vielmehr kann alsdann noch eine das Gewebe stützende F^2 beliebig angenommen werden. Dieser Specialfall tritt namentlich dann ein, wenn das Gewebe ein Polfünfeck und folglich unendlich viele kubische Polcurven besitzt*),

---

*) Die ohne Beweis aufgestellten letzten beiden Sätze meiner Arbeit über Polfünfecke und Polsechsecke (dieses Journal Bd. 77, S. 287) gelten also nur für vier beliebige Flächen eines so specialisirten linearen Φ^2-Gewebes dritter Stufe.

wie z. B. das Gewebe der ersten Polaren aller Ebenen bezüglich einer Φ^3; auf den zehn Kanten dieses Polfünfecks liegen alsdann die zehn Punktenpaare PP' des Gewebes. Dass alle F^2, welche eine Φ^3 stützen, ein specielles lineares F^2-System fünfter Stufe bilden, wurde bereits an anderer Stelle *) hervorgehoben.

41. Das lineare F^2-System fünfter Stufe ist u. A. dann ein specielles, wenn es einzelne oder unendlich viele Doppelebenen enthält, wenn seine Flächen einzelne oder unendlich viele Punkte mit einander gemein haben, oder wenn in Bezug auf dieselben mehr als zehn Paare conjugirter Punkte existirên. Z. B. alle F^2, welche ein Polsechsflach mit einander gemein haben, oder die einem Tetraeder umschrieben werden können, oder welche durch eine gegebene Gerade und einen beliebigen Punkt gehen, bilden ein sehr specielles F^2-System fünfter Stufe. — Das lineare Φ^2-Gewebe dritter Stufe ist ein specielles, wenn z. B. alle seine Flächen einzelne Ebenen oder auch die Ebenen eines Ebenenbüschels erster oder zweiter Ordnung berühren, wenn einzelne oder unendlich viele dieser Flächen sich auf zweifache Punkte reduciren, wenn das Gewebe unendlich viele Punktenpaare enthält, oder wenn von seinen Flächen zwei und folglich unendlich viele in einer Ebene liegen. Selbst dasjenige Gewebe ist kein allgemeines, von dessen zwei kubischen Polcurven eine in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt.

§ 7. Die linearen F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe vierter Stufe.

42. Das lineare F^2-System vierter Stufe stützt ein lineares Φ^2-Gewebe vierter Stufe und ist durch beliebige fünf Flächen desselben bestimmt. Es enthält unendlich viele Ebenenpaare; die Ebenen derselben sind einander conjugirt bezüglich aller Flächen des Gewebes. Das Φ^2-Gewebe dagegen enthält unendlich viele Punktenpaare, und zwar sind deren Punkte einander conjugirt bezüglich aller F^2 des Systemes. Im Allgemeinen gelten für diese Paare die Sätze (13. und 12.):

Der Ort aller Ebenenpaare des linearen F^2-Systemes vierter Stufe ist ein Ebenenbüschel zehnter Ordnung Γ^{10}; der Ort ihrer Doppellinien ist eine Fläche zehnter Ordnung F^{10}.

Der Ort aller Punktenpaare des linearen Φ^2-Gewebes vierter Stufe ist eine Raumcurve zehnter Ordnung C^{10}; der Ort ihrer Verbindungslinien ist eine Fläche zehnter Classe Φ^{10}.

43. Wenn ein Punkt P der Mittelpunkt von mehr als einer Kegelfläche des F^2-Systemes ist, so liegt er auf C^{10} und ist ein dreifacher Punkt

*) In meiner „Erweiterung der Polarentheorie algebr. Flächen", dieses Journal Bd. 78, S. 108.

von F^{10}. Denkt man sich nämlich das F^2-System bestimmt durch zwei jener Kegelflächen und irgend drei andere F^2, so schneiden sich die Polarebenen von P bezüglich dieser drei F^2 in einem Punkte P', welcher zu P conjugirt ist hinsichtlich aller F^2 des Systemes; die beiden Kegelflächen aber bestimmen einen Büschel concentrischer Kegelflächen des Systemes, und dieser Büschel enthält im Allgemeinen drei Ebenenpaare, deren Doppellinien sonach durch P gehen. Denkt man sich anderseits das lineare Φ^2-Gewebe vierter Stufe bestimmt durch ein Punktenpaar PP' und irgend vier andere Φ^2, so ergiebt sich (35.), dass P Doppelpunkt von unendlich vielen F^2 ist, welche diese vier und folglich alle Φ^2 des Gewebes stützen, und ferner (34.), dass durch $\overline{PP'}$ vier Ebenen gehen, welchen bezüglich des Gewebes vier andere Ebenen conjugirt sind. Also:

In jedem Punkte P der Raumcurve C^{10} schneiden sich drei Gerade der Fläche F^{10}; die drei Ebenenpaare des F^2-Systemes, deren Doppellinien sie sind, bilden die drei Paar Gegenflächen eines vollständigen Vierkantes. Die Raumcurve C^{10} enthält alle mehrfachen Punkte der Fläche F^{10}.

Auf jeder Geraden von F^{10} liegen vier Punkte von C^{10}.

In jeder Ebene des Büschels Γ^{10} liegen drei Gerade der Fläche Φ^{10}; die drei Punktenpaare des Φ^2-Gewebes, deren Verbindungslinien sie sind, bilden die drei Paar Gegenpunkte eines vollständigen Vierseites. Der Büschel Γ^{10} enthält alle mehrfachen Berührungsebenen der Fläche Φ^{10}.

Durch jede Gerade $\overline{PP'}$ von Φ^{10} gehen vier Ebenen von Γ^{10};

die vier ihnen conjugirten Ebenen des Büschels Γ^{10} bilden ein Tetraeder, welchem die Gerade $\overline{PP'}$ in Bezug auf alle Φ^2 des Gewebes conjugirt ist (17.). Jede Gerade, in welcher mehr als zwei Ebenen von Γ^{10} sich schneiden, ist hinsichtlich des Φ^2-Gewebes einem Tetraeder conjugirt und liegt auf Φ^{10}.

44. Die Raumcurve C^{10} ist also eine dreifache Curve der Fläche F^{10}, und der Büschel Γ^{10} besteht aus dreifachen Berührungsebenen der Fläche Φ^{10}. Jede Gerade von Φ^{10} schneidet die Fläche F^{10} in zwei dreifachen und vier einfachen Punkten; erstere liegen auf C^{10} und bilden ein Punktenpaar des Φ^2-Gewebes. Durch jede Gerade von F^{10} gehen zwei dreifache und vier einfache Berührungsebenen der Fläche Φ^{10}; erstere gehören zum Ebenenbüschel Γ^{10} und bilden ein Ebenenpaar des linearen F^2-Systemes vierter Stufe.

Die Doppellinie eines beliebigen Ebenenpaares des F^2-Systemes wird (43.) von vier Paar anderen Doppellinien in vier Punkten von C^{10} geschnitten; jedes dieser vier Paare ist durch das Ebenenpaar harmonisch getrennt. Eine beliebige Gerade der Fläche F^{10} kann also mit acht anderen durch Ebenen verbunden werden, welche die F^{10} doppelt berühren.

Die Verbindungslinie $\overline{PP'}$ eines beliebigen Punktenpaares des Φ^2-Gewebes liegt (43.) mit vier Paar anderen solchen Verbindungslinien in vier Ebenen von Γ^{10}; jedes dieser vier Paare ist durch das Punktenpaar harmonisch getrennt. Eine beliebige Gerade der Fläche Φ^{10} wird also von acht anderen in Doppelpunkten der Fläche geschnitten *).

45. Das lineare Φ^2-Gewebe vierter Stufe enthält vierfach unendlich viele lineare Φ^2-Gewebe dritter Stufe; auf C^{10} liegen die zehn Punktenpaare PP' eines beliebigen derselben, und alle Ebenen von Γ^{10} gehören seiner Kernfläche Φ^4 an. Daraus folgt die zweite Hälfte des Doppelsatzes:

Durch die Raumcurve zehnter Ordnung C^{10} gehen vierfach unendlich viele Flächen vierter Ordnung F^4. Eine beliebige derselben hat mit F^{10} ausser C^{10} im Allgemeinen zehn Gerade gemein, und ist durch vier dieser Geraden bestimmt. Die zehn Paar Ebenen von Γ^{10}, die in den zehn Geraden sich schneiden, sind die Ebenenpaare eines dem Systeme vierter Stufe angehörigen linearen F^2-Systemes dritter Stufe, von welchem die F^4 die Kernfläche ist.

Die Ebenen des Büschels zehnter Ordnung Γ^{10} berühren vierfach unendlich viele Flächen vierter Classe Φ^4. Eine beliebige dieser Flächen hat mit Φ^{10} ausser Γ^{10} im Allgemeinen zehn Gerade $\overline{PP'}$ (d. h. alle Ebenen derselben) gemein, und ist durch vier dieser Geraden bestimmt. Die zehn Paar Punkte PP' von C^{10}, welche in den zehn Geraden liegen, sind die Punktenpaare eines dem Gewebe vierter Stufe angehörigen linearen Φ^2-Gewebes dritter Stufe, von welchem die Φ^4 die Kernfläche ist.

46. Durch eine beliebige Gerade geht eine Φ^2-Schaar des Gewebes und ein F^2-Büschel des Systemes. Dagegen (37.):

Durch eine Gerade der Fläche F^{10} gehen doppelt unendlich viele Flä-

Durch eine Gerade $\overline{PP'}$ der Fläche Φ^{10} gehen doppelt unendlich

*) Der Ort aller Doppelpunkte von Φ^{10} ist eine Raumcurve 30ster Ordnung. Die 60 Doppelpunkte, welche auf einer beliebigen Fläche des F^2-Systemes liegen, sind die Eckpunkte von zwanzig Dreiecken, deren Seiten auf Φ^{10} liegen und deren Ebenen zu Γ^{10} gehören (vgl. 37. und 46.).

chen des linearen Φ^2-Gewebes vierter Stufe. Dieselben haben ausser den Ebenen der Geraden noch vier Berührungsebenen mit einander gemein.

viele Flächen des linearen F^2-Systemes vierter Stufe. Dieselben schneiden sich in $\overline{PP'}$ und in den Eckpunkten eines Tetraeders.

Das Tetraeder ist dasjenige, welchem (43.) die Gerade $\overline{PP'}$ in Bezug auf das Φ^2-Gewebe conjugirt ist; seine Eckpunkte liegen, wie man leicht beweist, auf der Doppelpunktscurve von Φ^{10}.

47. Wenn das lineare Φ^2-Gewebe vierter Stufe eine kubische Polcurve besitzt, so ist es ein specielles (39.) und besitzt unendlich viele, der Polcurve eingeschriebene Polsechsecke; die Geraden der Fläche Φ^{10} sind die Kanten dieser Polsechsecke, schneiden also je zweimal die Polcurve, und Φ^{10} geht durch jeden Punkt der letzteren fünfmal. Noch specieller ist das Φ^2-Gewebe, wenn es ein Polfünfeck, oder was auf Dasselbe hinausläuft, mehr als eine kubische Polcurve besitzt; das F^2-System ist alsdann dem Polfünfeck umschrieben, der Ebenenbüschel Γ^{10} zerfällt in zehn Ebenenbüschel erster Ordnung, deren Axen die zehn Kanten des Polfünfecks sind, auf diese zehn Kanten reducirt sich die Raumcurve C^{10}, und die Fläche F^{10} zerfällt in die zehn Ebenen des Polfünfecks. Auch dann ist das Φ^2-Gewebe ein specielles, wenn es einen zweifachen Punkt besitzt, wenn alle seine Flächen eine Berührungsebene gemein haben, oder wenn bezüglich derselben irgend einer Ebene eine Gerade conjugirt ist. — Wir unterlassen es, Specialfälle des linearen F^2-Systemes vierter Stufe hervorzuheben.

---

48. Wir schliessen, ohne die linearen F^2-Systeme dritter, zweiter und erster Stufe und die linearen Φ^2-Gewebe von fünf, sechs, sieben und acht Dimensionen noch besonders zu besprechen. Denn auf diese können mit Hülfe des Dualitäts-Principes die Sätze und Beweisführungen der §§. 3 bis 6 ohne Weiteres übertragen werden.

Strassburg i. E., den 29. April 1876.

Druckfehler.

Seite 19 Zeile 2 von unten lies „oder“ statt „und“, so dass es heisst ... „oder jedem n-fachen Punkte“. ...

Mathematische Preisaufgaben der Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig.

1. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des Sciences), von Hansen (in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen, S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right)=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\ldots,$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\cdots,$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besonderen Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1876 Geh. Hofrath Prof. Dr. Hankel) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Ueber die Ableitung eines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes.

(Von Herrn *R. Clausius* in Bonn.)

In einer kurzen Mittheilung vom 6. December v. J.*) habe ich ein neues elektrodynamisches Grundgesetz aufgestellt, dem ich in einer zweiten Mittheilung vom 7. Februar d. J.**) noch eine etwas vereinfachte Form gegeben habe. Es möge mir nun gestattet sein, die zu seiner Begründung nothwendige Auseinandersetzung folgen zu lassen, indem ich zeige, wie man es, ohne auf specielle Betrachtungen über die Natur der elektrodynamischen Kräfte einzugehen, mit Hülfe ganz allgemeiner und schon vielfach gemachter Voraussetzungen aus feststehenden Thatsachen ableiten kann.

§. 1. Verschiedene Ansichten über die strömende Elektricität.

Herr *W. Weber* hat bekanntlich alle elektrodynamischen Erscheinungen auf ein Grundgesetz zurückzuführen gesucht, welches die Kraft bestimmt, die zwei bewegte Elektricitätstheilchen auf einander ausüben. Seien nämlich e und e' die beiden in Punkten concentrirt gedachten Elektricitätstheilchen, und r ihr gegenseitiger Abstand zur Zeit t, so besteht die von den Theilchen auf einander ausgeübte Kraft nach *Weber* in einer Abstossung von der Stärke

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

worin c eine Constante bedeutet.

Bei der Ableitung dieser Formel ist Herr *Weber* von der Vorstellung ausgegangen, dass bei einem galvanischen Strome in jedem Leiterelemente gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität sich mit gleichen Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten bewegen. Diese Vorstellung ist eine so complicirte, dass schon viele Physiker daran Anstoss genommen haben. Solange nicht zwingende Gründe für die Annahme einer solchen

*) Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1875, S. 306 und *Pogg.* Ann. Bd. 156, S. 657.

**) Sitzungsberichte 1876, S. 18 und *Pogg.* Ann. Bd. 157, S. 489.

Doppelbewegung vorliegen, darf man die einfachere Vorstellung, dass ein Strom aus der Bewegung nur Eines Fluidums bestehe, nicht aufgeben, sondern muss versuchen, aus ihr die Wirkungen des galvanischen Stromes zu erklären.

Der letztgenannten, schon lange und oft zum Ausdruck gelangten Vorstellung hat neuerdings besonders Herr *Carl Neumann* eine bestimmtere Form gegeben*), indem er dabei sagt, dass seine Ueberlegungen vollständig mit denen übereinstimmen, welche *Riemann* schon i. J. 1854 in der 31. Naturforscherversammlung ausgesprochen habe. Herr *Neumann* nimmt nämlich an, ein metallischer Leiter enthalte zwar in jedem Raumtheilchen positive und negative Elektricität, aber nur die erstere sei in der Weise beweglich, dass sie im Leiter strömen könne, während die letztere unlöslich mit den ponderablen Atomen verbunden sei.

Ueber den Punkt, ob es überhaupt nöthig ist, neben der beweglichen positiven Elektricität noch eine an den ponderablen Atomen haftende negative Elektricität anzunehmen, oder ob sich die dieser Elektricität zugeschriebenen Kräfte auch auf andere Weise erklären lassen, können vielleicht noch verschiedene Ansichten geltend gemacht werden. Indessen bei der mathematischen Behandlung der Sache kann man, da die Kräfte so stattfinden, wie sie von solcher den Atomen anhaftenden negativen Elektricität ausgeübt werden würden, jedenfalls die letztere als vorhanden voraussetzen, ohne dadurch schon eine feste Entscheidung über ihre wirkliche Existenz zu treffen. In diesem Sinne werde ich jene Vorstellungsweise so, wie sie von Herrn *Neumann* formulirt ist, den nachstehenden Betrachtungen zu Grunde legen.

§. 2. Unvereinbarkeit des *Weber*schen Grundgesetzes mit der Vorstellung von nur Einer im festen Leiter beweglichen Elektricität.

Es möge nun zunächst die Frage gestellt werden, ob das *Weber*sche Grundgesetz mit jener Ansicht, dass nur Eine Elektricität im festen Leiter strömen könne, vereinbar ist. Dazu wollen wir als Kriterium den Erfahrungssatz wählen, *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ruhende Elektricität keine bewegende Kraft ausübt,* und wollen untersuchen, ob das *Weber*sche Grundgesetz auch dann noch zu diesem Satze führt, wenn man nur Eine der beiden Elektricitäten als beweglich betrachtet.

*) Berichte der K. Sächsischen Gesellschaft der Wiss. Math.-phys. Classe, 1871, S. 394 und 417.

Im Punkte x, y, z denken wir uns irgend eine Elektricitätsmenge, z. B. eine *Einheit* positiver Elektricität, und im Punkte x', y', z' ein Element ds' eines galvanischen Stromes befindlich. Die im letzteren sich bewegende positive Elektricität heisse $h'ds'$. Diese übt nach *Weber* auf die ruhende Elektricitätseinheit eine Abstossung aus, welche durch

$$\frac{h'ds'}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2}{c^2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right]$$

dargestellt wird, wobei natürlich ein negativer Werth des Ausdruckes Anziehung bedeutet. Hierin können wir im vorliegenden Falle, wo die Grösse r sich nur durch die Bewegung der im Leiterelemente ds' befindlichen Elektricität ändert, setzen:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

und in dieser letzteren Formel haben wir, wenn wir den Leiter des Stromes als durchweg gleich voraussetzen, so dass h' in allen seinen Theilen einen und denselben Werth hat, für einen constanten Strom $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$ zu setzen. Dadurch geht der Ausdruck für die Abstossung über in:

$$\frac{h'ds'}{r^2}\left\{1+\frac{1}{c^2}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right\}.$$

Nimmt man nun zunächst mit *Weber* an, dass in dem Leiterelemente ds' auch eine eben so grosse Menge negativer Elektricität sich mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung bewege, so muss man, um die Abstossung, welche diese auf die ruhende Elektricitätseinheit ausüben würde, zu erhalten, dem vorigen Ausdrucke im Ganzen das negative Vorzeichen geben, und ausserdem das Vorzeichen des Differentialcoefficienten $\frac{ds'}{dt}$ umkehren. Da aber dieser Differentialcoefficient nur quadratisch vorkommt, so bringt die Umkehrung seines Vorzeichens keine Aenderung in dem Ausdrucke hervor. Die von der negativen Elektricität ausgeübte Kraft würde also der von der positiven ausgeübten gleich und entgegengesetzt sein, so dass beide sich aufheben, und das Stromelement gar keine Kraft auf die ruhende Elektricitätseinheit ausüben würde. Es ergiebt sich also, dass das *Weber*sche Grundgesetz, wenn es mit der *Weber*schen Vorstellung von der doppelten Elektricitätsbewegung in Verbindung gebracht wird, mit dem obigen Erfahrungssatze übereinstimmt, indem nicht nur für einen ge-

schlossenen Strom, sondern auch für jedes einzelne Element desselben die Kraft Null wird.

Nun wollen wir aber die andere Annahme machen, dass die in dem Leiterelemente befindliche negative Elektricität nicht ströme, sondern fest mit den ponderablen Atomen verbunden sei. Dann wird die Kraft, welche diese auf die ruhende Elektricitätseinheit ausübt, durch die aus der Elektrostatik bekannte einfache Formel $-\frac{h'ds'}{r^2}$ dargestellt. Demnach heben sich in diesem Falle die beiden Kräfte nicht vollständig auf, sondern es bleibt eine durch die Formel

$$\frac{h'ds'}{c^2r^2}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$

dargestellte Abstossung übrig.

Die in die x-Richtung fallende Componente dieser Kraft erhält man durch Multiplication mit $\frac{x-x'}{r}$, und es ergiebt sich daher, wenn man diese Componente mit $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$ bezeichnet, folgende Gleichung:

$$(1.)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\frac{x-x'}{r^3}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right]ds'.$$

Diese Gleichung muss nach s' über den ganzen geschlossenen Strom integrirt werden, um die Grösse $\mathfrak{X}$, nämlich die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche der ganze Strom auf die ruhende Elektricitätseinheit ausübt, zu erhalten.

Dazu wollen wir mit dem auf der rechten Seite stehenden Ausdrucke noch einige Umformungen vornehmen. Man kann setzen:

$$\frac{x-x'}{r^{\frac{3}{2}}} = 2\frac{d\sqrt{r}}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\left[-\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+2r\frac{d^2r}{ds'^2}\right] = 4\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}.$$

Dadurch geht die Gleichung (1.) über in:

$$(2.)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}ds'.$$

Hierin kann man weiter setzen:

$$\begin{aligned}\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2} &= \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)-\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'dx}\\ &= \frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right],\end{aligned}$$

wodurch (2.) übergeht in:

$$(3.)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{8h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left\{\frac{d}{ds'}\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx}\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2\right]\right\}ds'.$$

Wenn man diese Gleichung über einen geschlossenen Strom integrirt, so giebt das erste innerhalb der Klammer befindliche Glied, welches ein Differentialcoefficient nach s' ist, den Werth Null. Das zweite Glied, welches ein Differentialcoefficient nach x ist, kann, da die Veränderliche x von der Veränderlichen s' unabhängig ist, unter dem Differentiationszeichen integrirt werden, und es kommt:

$$(4.)\qquad \mathfrak{X} = -\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \frac{d}{dx}\int\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2 ds'.$$

Ganz entsprechende Ausdrücke ergeben sich auch für die in die y- und z-Richtung fallenden Componenten der Kraft.

Man sieht sofort, dass das hierin vorkommende Integral nicht Null ist, und dass auch seine Differentialcoefficienten nach x, y und z im Allgemeinen nicht Null sein werden. Demnach müsste ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter Strom auf ruhende Elektricität eine Kraft ausüben, und zwar eine Kraft, welche ein Ergal hätte, da ihre in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten, der obigen Gleichung nach, durch die negativen Differentialcoefficienten einer von den Coordinaten der betreffenden ruhenden Elektricitätseinheit abhängenden Grösse dargestellt würden. Der galvanische Strom müsste also, ähnlich wie ein mit einem Ueberschuss von positiver oder negativer Elektricität geladener Körper, in jedem in seiner Nähe befindlichen leitenden Körper eine veränderte Vertheilung der Elektricität hervorrufen*). Auch für einen Magneten würde man, wenn man den Magnetismus durch moleculare elektrische Ströme erklärt, ähnliche Wirkungen auf die ihn umgebenden leitenden Körper erhalten.

Solche Wirkungen sind aber, trotz der vielen Gelegenheit, die man dazu gehabt haben würde, nie beobachtet worden, und man wird daher den obigen Satz, welcher ausdrückt, dass sie nicht stattfinden, gewiss allgemein als feststehenden Erfahrungssatz anerkennen, woraus dann, da das in der Gleichung (4.) ausgedrückte Resultat diesem Satze widerspricht, der Schluss folgt, ***dass das Webersche Grundgesetz mit der Ansicht, dass bei einem in einem festen Leiter stattfindenden galvanischen Strome nur die positive Elektricität sich bewegt, unvereinbar ist.***

---

*) Derselbe Schluss ist auch schon i. J. 1873 von Herrn *Riecke* gezogen (Gött. Nachr. 5. Juli 1873), was mir, als ich dieses schrieb, unbekannt war, worauf ich aber noch während des Druckes durch den eben erschienenen neusten Aufsatz von Herrn *Riecke* (Gött. Nachr. 28. Juni 1876), in welchem jener ältere citirt ist, aufmerksam gemacht bin.

§. 3. Betrachtung eines von *Riemann* aufgestellten Kraftgesetzes unter dem obigen Gesichtspunkte.

In neuster Zeit, nachdem ich meine erste Mittheilung über das von mir aufgestellte Grundgesetz schon veröffentlicht hatte, ist ein Werk erschienen *), in welchem ein anderes, von *Riemann* in seinen Vorlesungen mitgetheiltes elektrodynamisches Kraftgesetz angeführt wird, und es wird daher zweckmässig sein, im Anschlusse an das Vorige auch dieses Gesetz unter demselben Gesichtspunkte zu betrachten, d. h. zu untersuchen, ob es mit der Ansicht von nur Einer im festen Leiter beweglichen Elektricität vereinbar ist.

Seien, wie oben, e und e' zwei in Punkten concentrirt gedachte Elektricitätstheilchen, x, y, z und x', y', z' ihre rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit t, so gilt für die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche e von e' erleidet, nach *Riemann* (S. 327) folgende Gleichung:

$$(5.)\qquad X = \frac{ee'}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{ee'}{c^2}\frac{d\left\{\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)\right\}}{dt}$$
$$+\frac{ee'}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left\{\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right\},$$

und entsprechende Gleichungen sind für die beiden anderen Coordinatenrichtungen zu bilden.

Diese Gleichung wollen wir nun wieder dazu anwenden, die Kraft zu bestimmen, welche ein geschlossener galvanischer Strom auf eine ruhende Elektricitätseinheit ausübt. Wir setzen daher:

$$e = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Ferner ersetzen wir, um zunächst die Kraft zu bestimmen, welche von der im Leiterelemente ds' sich bewegenden positiven Elektricität ausgeübt wird, e' durch das Product $h'ds'$. Dann geht der vorige Ausdruck über in:

$$h'ds'\left\{\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} - \frac{1}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{dt}\right)}{dt} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]\right\}.$$

Hierin kann das letzte Glied dadurch vereinfacht werden, dass die in der eckigen Klammer stehende Summe durch $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ ersetzt wird, und das zweite

*) Schwere, Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von *Bernhard Riemann* bearbeitet von *Karl Hattendorff*. Hannover 1876.

Glied möge so umgeändert werden, dass x' und r als Functionen von s' und die Grösse s' als Function von t behandelt und dabei, weil der Strom constant ist, $\frac{d^2s'}{dt^2} = 0$ gesetzt wird. Dann kommt:

$$h'ds'\left[\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} - \frac{1}{c^2}\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)}{ds'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Gehen wir nun zunächst wieder von der Voraussetzung aus, dass in dem Leiterelemente ds' eine gleich grosse Menge negativer Elektricität mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung ströme, so haben wir, um die x-Componente der von dieser Elektricitätsmenge auf die ruhende Elektricitätseinheit ausgeübten Kraft darzustellen, denselben Ausdruck, wie vorher, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen zu bilden. Beide Kräfte heben sich somit auf, und es ist daher unter der Voraussetzung zweier im Leiter beweglichen Elektricitäten auch das *Riemann*sche Kraftgesetz mit unserem Erfahrungssatze im Einklange.

Machen wir dagegen die Voraussetzung, dass die im Leiterelemente ds' befindliche negative Elektricität in Ruhe sei, so haben wir die x-Componente der von ihr auf die ruhende Elektricitätseinheit ausgeübten Kraft durch

$$-h'ds'\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}$$

darzustellen, und wir erhalten daher, wenn wir die x-Componente der Kraft, mit welcher das Stromelement ds' auf die ruhende Elektricitätseinheit wirkt, wieder mit $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$ bezeichnen, die Gleichung:

$$(6.)\qquad \frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\left[-\frac{d\left(\frac{2}{r}\frac{dx'}{ds'}\right)}{ds'} + \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}\right]ds'.$$

Denken wir uns diese Gleichung über einen geschlossenen Strom integrirt, so giebt das erste Glied Null, und es kommt:

$$\mathfrak{X} = \frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\int\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx}ds',$$

oder anders geschrieben:

$$(7.)\qquad \mathfrak{X} = -\frac{h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\frac{d}{dx}\int\frac{ds'}{r}.$$

Entsprechende Gleichungen erhält man natürlich auch für die in die beiden anderen Coordinatenrichtungen fallenden Kraftcomponenten.

Das hierin vorkommende Integral ist nicht Null und auch seine Differentialcoefficienten sind es im Allgemeinen nicht. Wir erhalten also auch aus dem *Riemann*schen Gesetze dasselbe Resultat, wie aus dem *Weber*schen, dass ein geschlossener galvanischer Strom, und ebenso auch ein Magnet, auf jeden in seiner Nähe befindlichen leitenden Körper eine der elektrostatischen Influenz ähnliche Wirkung ausüben müsste. Da dieses unserem Erfahrungssatze widerspricht, so können wir auch von dem *Riemann*schen Gesetze sagen, *dass es mit der Vorstellung von nur Einer im festen Leiter beweglichen Elektricität nicht vereinbar ist.*

§. 4. Ausdrücke der Kraftcomponenten für ein specielles Coordinatensystem.

Wir wollen nun dazu schreiten, für die Kraft, welche ein bewegtes Elektricitätstheilchen e von einem anderen bewegten Elektricitätstheilchen e' erleidet, solche Ausdrücke abzuleiten, die auch unter der Voraussetzung, dass es nur Eine im festen Leiter bewegliche Elektricität gebe, den Erfahrungssätzen entsprechen.

Gemäss der Annahme, dass die Kraft von der gegenseitigen Lage der Theilchen und von ihren durch die Geschwindigkeitscomponenten und Beschleunigungscomponenten bestimmten Bewegungszuständen abhänge, bilden wir für jede der drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft einen allgemeinen Ausdruck, welcher von den relativen Coordinaten des einen Theilchens zum anderen, und von den nach der Zeit genommenen Differentialcoefficienten erster und zweiter Ordnung der Coordinaten beider Theilchen abhängt. In diesen Ausdruck nehmen wir vorläufig alle möglichen Glieder bis zur zweiten Ordnung auf, wobei unter Gliedern zweiter Ordnung alle Glieder von solchen Formen verstanden werden, wie sie durch zweimalige Differentiation nach t entstehen können, die also entweder einen Differentialcoefficienten zweiter Ordnung oder zwei Differentialcoefficienten erster Ordnung als Factoren haben.

Es möge nun zunächst ein rechtwinkliges Coordinatensystem von specieller Lage eingeführt werden. Die eine Coordinatenaxe soll nämlich durch die beiden Punkte gehen, in welchen die beiden Elektricitätstheilchen sich zur Zeit t gerade befinden, und zwar möge die Richtung von e' nach e als die positive angenommen werden. Die auf dieser Axe gemessenen Coordinaten der beiden Theilchen mögen l und l' sein. Die beiden anderen Coordinatenaxen können irgend welche auf der ersten und unter einander

senkrechte Richtungen haben. Wenn dann die auf diesen Axen gemessenen Coordinaten der beiden Theilchen allgemein mit m, n und m', n' bezeichnet werden, so ist zur Zeit t zu setzen:

$$m = n = m' = n' = 0.$$

Demnach sind auch die auf diese beiden Richtungen bezüglichen relativen Coordinaten $m-m'$ und $n-n'$ zur Zeit t gleich Null, und nur die auf die erste Richtung bezügliche relative Coordinate $l-l'$ hat einen angebbaren Werth, welcher gleich der Entfernung der beiden Theilchen von einander ist und daher, der obigen Bezeichnungsweise entsprechend, durch r dargestellt werden kann. Daraus folgt, dass bei Anwendung dieses Coordinatensystems die Functionen der relativen Coordinaten, welche in den Ausdrücken der Kraftcomponenten vorkommen, nur Functionen von r sein können. Auch in anderer Beziehung bietet dieses Coordinatensystem noch Gelegenheit zu Vereinfachungen dar, indem aus dem Verhalten der in den Gliedern vorkommenden Differentialcoefficienten unmittelbar ersichtlich ist, dass gewisse Glieder auf die betreffende Kraftcomponente keinen Einfluss haben können, und gewisse Paare von Gliedern einen gleichen Einfluss haben müssen.

Als erste zu untersuchende Kraftcomponente wählen wir die in die l-Richtung fallende aus. Indem wir diese mit Lee' bezeichnen, bilden wir den die Grösse L bestimmenden Ausdruck.

Dieser Ausdruck muss zunächst ein Glied enthalten, welches von den Bewegungen der Theilchen unabhängig ist, und die elektrostatische Kraft darstellt. Dieses Glied ist vollkommen bekannt und lautet $\frac{1}{r^2}$.

Von den anderen Gliedern betrachten wir zuerst diejenigen, welche nur Differentialcoefficienten der Coordinaten des Theilchens e enthalten.

Die Glieder, welche nur Einen Differentialcoefficienten erster Ordnung enthalten, lauten allgemein:

$$A\frac{dl}{dt}, \quad A'\frac{dm}{dt}, \quad A''\frac{dn}{dt},$$

worin A, A' und A'' Functionen von r bedeuten; aber in Bezug auf die beiden letzten lässt sich sofort ein Schluss der oben angedeuteten Art ziehen. Das Glied $A'\frac{dm}{dt}$ ändert nämlich mit $\frac{dm}{dt}$ sein Vorzeichen. Nun verhält sich aber für einen in der l-Axe liegenden Punkt die negative Seite der m-Richtung ebenso zur l-Richtung, wie die positive Seite, und es ist daher

in unserem Falle, wo beide Punkte in der l-Axe liegen, kein Grund abzusehen, weshalb eine Bewegung nach der einen Seite eine andere Kraft in der l-Richtung zur Folge haben sollte, als eine Bewegung nach der anderen Seite. Demnach muss dieses Glied aus dem Ausdrucke verschwinden, d. h. es muss $A' = 0$ sein. Ebenso kann man auch schliessen, dass $A'' = 0$ sein muss. Es bleibt also von den obigen drei Gliedern nur $A \frac{dl}{dt}$ übrig.

Dasselbe gilt von den drei Gliedern

$$A_1 \frac{d^2 l}{dt^2}, \quad A_1' \frac{d^2 m}{dt^2}, \quad A_1'' \frac{d^2 n}{dt^2},$$

von denen die beiden letzten ebenfalls verschwinden müssen, so dass nur das erste übrig bleibt.

Was endlich die Glieder anbetrifft, welche zwei gleiche oder verschiedene Differentialcoefficienten erster Ordnung als Factoren haben, in welchen also eines der folgenden Quadrate und Produkte vorkommt:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{dn}{dt}\right)^2, \quad \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt}, \quad \frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt}, \quad \frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt},$$

so lässt sich auf die Glieder mit den zuletzt erwähnten Produkten dasselbe anwenden, was vorher gesagt wurde. Diese Produkte ändern nämlich ihr Vorzeichen mit $\frac{dm}{dt}$ und $\frac{dn}{dt}$, während doch sowohl bei der m-Richtung als auch bei der n-Richtung die negative Seite sich zu den beiden anderen Axen gerade so verhält, wie die positive Seite. Glieder mit diesen Produkten können also in dem Ausdrucke nicht vorkommen. Da ferner die m- und n-Richtung sich zur l-Axe geometrisch gleich verhalten, so müssen die Quadrate $\left(\frac{dm}{dt}\right)^2$ und $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ gleiche Coefficienten haben. Die betreffenden Glieder bilden also eine Summe von der Form:

$$A_2' \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right].$$

Dieser Summe wollen wir folgende etwas abgeänderte Gestalt geben:

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 \left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right],$$

worin A_2 an die Stelle der Differenz $A_2' - A_3$ gesetzt ist. Nun ist aber, wenn v die Geschwindigkeit des Theilchens e bedeutet:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = v^2,$$

und die vorige Summe lässt sich daher einfacher so schreiben:

$$A_2 \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + A_3 v^2.$$

Fassen wir nun alle Glieder, welche nur Differentialcoefficienten der Coordinaten des Theilchens e enthalten, zusammen und bezeichnen die Summe dieser Glieder mit L_1, so kommt:

$$(8.)\qquad L_1 = A\frac{dl}{dt}+A_1\frac{d^2l}{dt^2}+A_2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+A_3v^2.$$

Ganz entsprechend können wir, wenn wir die Summe der Glieder, welche nur Differentialcoefficienten der Coordinaten des Theilchens e' enthalten, mit L_2 bezeichnen, schreiben:

$$(9.)\qquad L_2 = A_4\frac{dl'}{dt}+A_5\frac{d^2l'}{dt^2}+A_6\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2+A_7v'^2.$$

Nun bleiben noch die Glieder zu betrachten, welche ein Produkt aus Differentialcoefficienten der Coordinaten beider Theilchen, also eines der folgenden Produkte enthalten:

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt},\quad \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt},\quad \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt},$$

$$\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt},\quad \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt},\quad \frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt},\quad \frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt},\quad \frac{dm}{dt}\frac{dn'}{dt},\quad \frac{dm'}{dt}\frac{dn}{dt}.$$

Bei den sechs letzten Produkten kann man wieder aus dem Umstande, dass sie mit $\frac{dm}{dt}$, $\frac{dm'}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dn'}{dt}$ ihr Vorzeichen ändern, ganz in der obigen Weise schliessen, dass Glieder mit diesen Produkten in dem Ausdrucke der Kraftcomponente nicht vorkommen können. Auf das zweite und dritte Produkt aber ist dieser Schluss nicht anwendbar, obwohl die Aenderung des Vorzeichens auch bei ihnen vorkommt. Wenn nämlich der Differentialcoefficient $\frac{dm}{dt}$ sein Vorzeichen ändert, also das Theilchen e seine in der m-Richtung stattfindende Bewegung umkehrt, so verhält sich die jetzige Bewegung zwar zur l-Richtung ebenso, wie die frühere, aber zu der durch $\frac{dm'}{dt}$ ausgedrückten nach der m-Richtung gehenden Bewegung des Theilchens e' verhält sie sich anders. Wenn sie früher mit ihr nach gleicher Seite ging, so geht sie jetzt nach entgegengesetzter Seite, und umgekehrt. Die Coefficienten dieser beiden Produkte brauchen also nicht Null zu werden, aber sie müssen unter einander gleich sein, weil die m- und n-Richtung sich zur l-Axe geometrisch gleich verhalten.

Es ergiebt sich also, indem wir die Summe der Glieder, welche Differentialcoefficienten der Coordinaten beider Theilchen enthalten, mit L_3 bezeichnen, folgende Gleichung:

$$L_3 = A_8'\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt}+A_9\left(\frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt}+\frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right).$$

Diese Gleichung wollen wir in ähnlicher Weise, wie es weiter oben mit einem anderen Ausdrucke geschehen ist, umgestalten. Wir schreiben zunächst:

$$L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9\left(\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt}\right),$$

worin A_8 an die Stelle der Differenz $A_8' - A_9$ gesetzt ist. Nun ist aber, wenn ε den Winkel zwischen den Bewegungsrichtungen der beiden Theilchen e und e' bedeutet:

$$\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dm}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dn'}{dt} = vv'\cos\varepsilon,$$

und die vorige Gleichung lässt sich daher so schreiben:

$$(10.)\qquad L_3 = A_8 \frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt} + A_9 vv'\cos\varepsilon.$$

Nachdem wir vorstehend die einzelnen Gruppen der in L enthaltenen Glieder näher bestimmt haben, erhalten wir aus ihnen die ganze Grösse L durch Bildung folgender Gleichung:

$$(11.)\qquad L = \frac{1}{r^2} + L_1 + L_2 + L_3.$$

In ganz entsprechender Weise können wir nun auch die in die m- und n-Richtung fallenden Kraftcomponenten, welche mit Mee' und Nee' bezeichnet werden mögen, behandeln; es wird aber nicht nöthig sein, auch diese Behandlung hier vollständig durchzuführen, sondern es wird genügen, die zur Bestimmung von M und N dienenden Systeme von Gleichungen einfach hinzuschreiben. Es sind die folgenden:

$$(12.)\qquad \begin{cases} M_1 = B\frac{dm}{dt} + B_1\frac{d^2m}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt}, \\ M_2 = B_3\frac{dm'}{dt} + B_4\frac{d^2m'}{dt^2} + B_5\frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt}, \\ M_3 = B_6\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} + B_7\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}, \\ M = M_1 + M_2 + M_3. \end{cases}$$

$$(13.)\qquad \begin{cases} N_1 = B\frac{dn}{dt} + B_1\frac{d^2n}{dt^2} + B_2\frac{dl}{dt}\frac{dn}{dt}, \\ N_2 = B_3\frac{dn'}{dt} + B_4\frac{d^2n'}{dt^2} + B_5\frac{dl'}{dt}\frac{dn'}{dt}, \\ N_3 = B_6\frac{dl}{dt}\frac{dn'}{dt} + B_7\frac{dl'}{dt}\frac{dn}{dt}, \\ N = N_1 + N_2 + N_3. \end{cases}$$

§. 5. **Ausdrücke der Kraftcomponenten für ein beliebiges Coordinatensystem.**

Nachdem für ein specielles Coordinatensystem die drei Kraftcomponenten ausgedrückt sind, können wir daraus auch leicht die Kraftcomponenten für ein beliebiges Coordinatensystem ableiten.

Es sei irgend ein rechtwinkliges Coordinatensystem eingeführt, in welchem die beiden Elektricitätstheilchen die Coordinaten x, y, z und x', y', z' haben. Die in diese Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft, welche e von e' erleidet, mögen durch Xee', Yee' und Zee' dargestellt werden, dann handelt es sich darum, die Grössen X, Y und Z auszudrücken.

Um X auszudrücken, bezeichnen wir die Winkel, welche die x-Richtung mit den früher angenommenen Coordinatenrichtungen, nämlich der l-, m- und n-Richtung bildet, mit (lx), (mx) und (nx). Dann ist zu setzen:

$$(14.)\qquad X = L\cos(lx)+M\cos(mx)+N\cos(nx).$$

Man kann aber auch die einzelnen Bestandtheile von X durch die entsprechenden Bestandtheile von L, M und N ausdrücken. Bezeichnet man die Summe derjenigen in X vorkommenden Glieder, welche nur Differentialcoefficienten der Coordinaten von e enthalten, mit X_1, die Summe der Glieder, welche nur Differentialcoefficienten der Coordinaten von e' enthalten, mit X_2, und die Summe der Glieder, welche Produkte aus Differentialcoefficienten der Coordinaten beider Theilchen enthalten, mit X_3, so gilt für X_1 die Gleichung:

$$(15.)\qquad X_1 = L_1\cos(lx)+M_1\cos(mx)+N_1\cos(nx),$$

und ebensolche Gleichungen gelten für X_2 und X_3.

Setzt man nun in die vorige Gleichung für L_1, M_1 und N_1 die unter (8.), (12.) und (13.) gegebenen Werthe ein, und berücksichtigt bei der Addition der drei Glieder die Gleichungen:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dl}{dt}\cos(lx)+\dfrac{dm}{dt}\cos(mx)+\dfrac{dn}{dt}\cos(nx) = \dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2l}{dt^2}\cos(lx)+\dfrac{d^2m}{dt^2}\cos(mx)+\dfrac{d^2n}{dt^2}\cos(nx) = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \end{cases}$$

so kommt:

$$(17.)\qquad \begin{cases} X_1 = B\dfrac{dx}{dt}+B_1\dfrac{d^2x}{dt^2}+B_2\dfrac{dl}{dt}\dfrac{dx}{dt} \\ \qquad +\left[(A-B)\dfrac{dl}{dt}+(A_1-B_1)\dfrac{d^2l}{dt^2}+(A_2-B_2)\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2+A_3v^2\right]\cos(lx). \end{cases}$$

Hierin substituiren wir für $\cos(lx)$ seinen Werth $\dfrac{x-x'}{r}$, und zwar multipliciren wir mit $\dfrac{1}{r}$ die einzelnen innerhalb der eckigen Klammer

stehenden Glieder, während wir $x-x'$ als gemeinsamen Factor ausserhalb der Klammer stehen lassen.

Ferner wollen wir für die Differentialcoefficienten von l diejenigen von r einführen. Es ist schon oben gesagt, dass der Abstand r der Theilchen e und e' von einander zur Zeit t einfach durch die Differenz $l-l'$ dargestellt wird, weil zu dieser Zeit die Coordinaten m, n, m' und n' gleich Null sind. Will man aber die Grösse r differentiiren, so muss man dazu den allgemeinen Ausdruck

$$r = \sqrt{(l-l')^2+(m-m')^2+(n-n')^2}$$

anwenden, und erst nach vollzogener Differentiation darf man $m-m' = n-n' = 0$ setzen. Für die Differentiation ist noch zu bemerken, dass sich die Coordinaten l, m, n nur durch die Bewegung des Theilchens e und die Coordinaten l', m', n' nur durch die Bewegung des Theilchens e' ändern, während r sich durch die Bewegung beider Theilchen ändert. Die den beiden einzelnen Bewegungen entsprechenden Aenderungen von r kann man dadurch von einander unterscheiden, dass man r als Function der von den beiden Theilchen beschriebenen Bahnlängen s und s', und diese Bahnlängen ihrerseits als Functionen von t betrachtet. Dann kann man die Differentiationen, welche sich nur auf die Bewegung des Theilchens e beziehen, so ausführen:

$$\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}\left[(l-l')\frac{dl}{dt}+(m-m')\frac{dm}{dt}+(n-n')\frac{dn}{dt}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = &-\frac{1}{r^3}\left[(l-l')\frac{dl}{dt}+(m-m')\frac{dm}{dt}+(n-n')\frac{dn}{dt}\right]^2\\ &+\frac{1}{r}\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{r}\left[(l-l')\frac{d^2l}{dt^2}+(m-m')\frac{d^2m}{dt^2}+(n-n')\frac{d^2n}{dt^2}\right].\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen kann nun

$$m-m' = n-n' = 0 \quad \text{und} \quad l-l' = r$$

gesetzt werden, und zugleich kann man setzen:

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Aus den dadurch entstehenden Gleichungen ergeben sich für die Differentialcoefficienten von l folgende Ausdrücke:

$$(18.) \qquad \frac{dl}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt},$$

$$(19.) \qquad \frac{d^2l}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{1}{r}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Diese Ausdrücke haben wir in (17.) einzusetzen, wobei wir der Gleichförmigkeit wegen auch v^2 durch $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ ersetzen wollen. Für die dann in der eckigen Klammer stehenden Functionen von r, mit welchen die Differentialcoefficienten multiplicirt sind, wollen wir zur Abkürzung die einfachen Zeichen C, C_1, C_2 und C_3 einführen. Dann lautet die Gleichung:

$$(20.)\quad \begin{cases} X_1 = B\frac{dx}{dt}+B_1\frac{d^2x}{dt^2}+B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{dt}\frac{ds}{dt} \\ \quad +\left\{C\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}+\left[C_1\frac{d^2r}{ds^2}+C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+C_3\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+C_1\frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right\}(x-x'). \end{cases}$$

Ganz ebenso erhält man:

$$(21.)\quad \begin{cases} X_2 = B_3\frac{dx'}{dt}+B_4\frac{d^2x'}{dt^2}+B_5\frac{dr}{ds'}\frac{dx'}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ \quad +\left\{C_4\frac{dr}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\left[C_5\frac{d^2r}{ds'^2}+C_6\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+C_7\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+C_5\frac{dr}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\right\}(x-x'). \end{cases}$$

Was nun noch die dritte zu bestimmende Grösse X_3 anbetrifft, so hat man, um sie auszudrücken, in die Gleichung

$$X_3 = L_3\cos(lx)+M_3\cos(mx)+N_3\cos(nx)$$

für L_3, M_3 und N_3 die unter (10.), (12.) und (13.) gegebenen Werthe einzusetzen. Wenn man dann bei der Addition der drei Glieder wieder die erste der Gleichungen (16.) berücksichtigt, so kommt:

$$X_3 = B_6\frac{dl}{dt}\frac{dx'}{dt}+B_7\frac{dl'}{dt}\frac{dx}{dt}$$
$$+\left[(A_8-B_6-B_7)\frac{dl}{dt}\frac{dl'}{dt}+A_9vv'\cos\varepsilon\right]\cos(lx),$$

welche Gleichung sich dem Obigen entsprechend auch so schreiben lässt:

$$(22.)\quad \begin{cases} X_3 = B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{dt}\frac{ds}{dt}+B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ \quad +\left(C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+C_9\cos\varepsilon\right)(x-x')\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{cases}$$

Nachdem die drei Grössen X_1, X_2 und X_3 ausgedrückt sind, kann man die ganze Grösse X aus der Gleichung

$$(23.)\qquad X = \frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3$$

erhalten.

Ebenso kann man natürlich auch die Grössen Y und Z darstellen, wozu man in den vorstehenden Gleichungen nur die speciell auf die x-Axe

bezüglichen Grössen durch die entsprechenden, auf die y-Axe oder auf die z-Axe bezüglichen Grössen zu ersetzen hat, während man alles auf r bezügliche unverändert beibehält.

Es kommt nun darauf an, die in den Gleichungen (20.), (21.) und (22.) vorkommenden, bisher unbestimmt gelassenen Functionen von r zu bestimmen.

§. 6. Bestimmung der in X_2 vorkommenden Functionen.

Um zunächst die in X_2 vorkommenden Functionen theilweise zu bestimmen, möge von dem Satze Gebrauch gemacht werden, welcher schon in den §§. 2 und 3 angewandt wurde, nämlich *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom auf ruhende Elektricität keine bewegende Kraft ausübt.*

Wir denken uns also, wie in §. 2, im Punkte x, y, z eine ruhende positive Elektricitätseinheit, und im Punkte x', y', z' ein Stromelement ds' befindlich, welches letztere aus der sich bewegenden positiven Elektricitätsmenge $h'ds'$ und aus der ruhenden negativen Elektricitätsmenge $-h'ds'$ besteht. Diese beiden Elektricitätsmengen üben auf die ruhende Elektricitätseinheit Kräfte aus, deren in die x-Richtung fallende Componenten sind:

$$h'ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_2\right) \quad \text{und} \quad -h'ds'\frac{x-x'}{r^3}.$$

Die Summe dieser beiden ist die x-Componente der von dem Stromelemente auf die Elektricitätseinheit ausgeübten Kraft, welche Componente, wie früher, mit $\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds'$ bezeichnet werden möge. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = h'ds'X_2.$$

Hierin haben wir für X_2 den unter (21.) gegebenen Ausdruck zu setzen. Dabei wollen wir statt

$$\frac{dx'}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2x'}{dt^2}$$

die gleichbedeutenden Formeln

$$\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2x'}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}$$

anwenden und wegen der Voraussetzung, dass der Strom constant sei, $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$ setzen. Dann lautet die Gleichung:

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{X}}{ds'}ds' = h'ds'\Big\{\Big[B_3\dfrac{dx'}{ds'}+C_4(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\Big]\dfrac{ds'}{dt} \\ \quad +\Big[B_4\dfrac{d^2x'}{ds'^2}+B_5\dfrac{dr}{ds'}\dfrac{dx'}{ds'}+\Big(C_5\dfrac{d^2r}{ds'^2}+C_6\Big(\dfrac{dr}{ds'}\Big)^2+C_7\Big)(x-x')\Big]\Big(\dfrac{ds'}{dt}\Big)^2\Big\}. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck muss, jenem Satze nach, bei der Integration über einen beliebigen geschlossenen Strom Null geben. Wenn aber das Integral des ganzen Ausdruckes, unabhängig von der Stromintensität, Null sein soll, so müssen die Integrale der beiden mit $\frac{ds'}{dt}$ und $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ multiplicirten Glieder einzeln Null sein. Die in den beiden eckigen Klammern stehenden Ausdrücke müssen demnach vollständige Differentialcoefficienten nach s' sein, ohne dass dazu zwischen r und x' irgend eine specielle Relation angenommen zu werden braucht.

Wenn der erste Ausdruck ein Differentialcoefficient nach s' sein soll, so kann er, wie man sofort aus seiner Form ersieht, nur gleich

$$-\frac{d}{ds'}[B_3(x-x')]$$

sein, und dazu ist erforderlich, dass die Gleichung

$$(25.)\qquad C_4 = -\frac{dB_3}{dr}$$

erfüllt ist.

Ebenso ist beim zweiten Ausdrucke, wenn man die Glieder, welche Differentialcoefficienten zweiter Ordnung enthalten, in's Auge fasst, sofort ersichtlich, dass er nur mit folgendem Differentialcoefficienten übereinstimmen kann:

$$\frac{d}{ds'}\Big[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\Big],$$

wozu erforderlich ist, dass die Gleichungen

$$(26.)\quad \begin{cases} B_5 = \dfrac{dB_4}{dr}-C_5, \\ C_6 = \dfrac{dC_5}{dr}, \\ C_7 = 0 \end{cases}$$

erfüllt sind.

Auf diese Weise sind die in der Gleichung (21.) vorkommenden sieben unbestimmten Functionen auf drei zurückgeführt, und jene Gleichung lässt sich nun so schreiben:

$$(27.)\quad \begin{cases} X_2 = -\dfrac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\dfrac{ds'}{dt}+\dfrac{d}{ds'}\Big[B_4\dfrac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\Big]\Big(\dfrac{ds'}{dt}\Big)^2 \\ \qquad +\Big[B_4\dfrac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\dfrac{dr}{ds'}\Big]\dfrac{d^2s'}{dt^2}. \end{cases}$$

§. 7. Bestimmung der in X_1 vorkommenden Functionen.

Bei der Behandlung der Grösse X_1 können wir einen dem vorigen ähnlichen Erfahrungssatz anwenden, nämlich den folgenden: *eine ruhende Elektricitätsmenge übt auf einen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen und constanten galvanischen Strom keine Kraft aus.*

Dieser Satz bedarf noch einer Erläuterung. Wenn irgendwo Elektricität von Einer Art, also z. B. positive Elektricität angehäuft ist, so übt diese auf jeden in ihrer Nähe befindlichen leitenden Körper die elektrostatische Influenzwirkung aus, und diese Wirkung muss natürlich auch der Leiter des galvanischen Stromes erleiden. Der obige Satz sagt nur aus, dass er ausser dieser Wirkung nicht noch eine besondere, durch den Strom bedingte und daher von der Stromstärke abhängige Wirkung erleide. Dabei ist noch zu bemerken, dass, wenn ein geschlossener galvanischer Strom eine solche Wirkung erlitte, auch ein Magnet sie erleiden müsste. Man hat aber immer beobachtet, dass ruhende Elektricität auf einen ruhenden Magneten nur in derselben Weise wirkt, wie auf ein unmagnetisches Metallstück von derselben Form und Grösse. Demnach wird man den obigen Satz wohl ohne Bedenken als einen feststehenden Erfahrungssatz anerkennen.

Um diesen Satz anzuwenden, denken wir uns im Punkte x', y', z' eine ruhende Elektricitätseinheit und im Punkte x, y, z ein Stromelement ds, welches die bewegte Elektricitätsmenge $h\,ds$ und die ruhende Elektricitätsmenge $-h\,ds$ enthält. Die x-Componenten der Kräfte, welche diese beiden von der ruhenden Elektricitätseinheit erleiden, sind:

$$h\,ds\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right) \quad \text{und} \quad -h\,ds\frac{x-x'}{r^3}.$$

Demnach wird die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement von der Elektricitätseinheit erleidet, durch das Produkt $h\,ds\,X_1$ dargestellt, worin für X_1 der unter (20.) gegebene Ausdruck zu setzen ist. Wenn wir dabei wieder für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ die Formeln

$$\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$

anwenden, und zugleich, weil der Strom constant sein soll, $\frac{d^2s}{dt^2}=0$ setzen, so lautet der Ausdruck:

$$h\,ds\Big\{\left[B\frac{dx}{ds}+C(x-x')\frac{dr}{ds}\right]\frac{ds}{dt}$$
$$+\left[B_1\frac{d^2x}{ds^2}+B_2\frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds}+\left(C_1\frac{d^2r}{ds^2}+C_2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+C_3\right)(x-x')\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\Big\}.$$

Hieraus können wir nun zunächst ganz entsprechende Schlüsse ziehen, wie im vorigen Paragraphen. Wenn nämlich die Elektricitätseinheit auf den ganzen Strom keine nach der x-Richtung gehende Kraft ausüben soll, so muss das auf den ganzen Strom ausgedehnte Integral des Ausdruckes Null sein, und daraus erhält man, entsprechend den Gleichungen (25.) und (26.), die Gleichungen:

$$(28.)\quad \begin{cases} C = \dfrac{dB}{dr}, \\ B_2 = \dfrac{dB_1}{dr} + C_1; \quad C_2 = \dfrac{dC_1}{dr}; \quad C_3 = 0. \end{cases}$$

Ausserdem können aber im vorliegenden Falle noch weitere Schlüsse gezogen werden. Der Satz sagt nämlich nicht nur aus, dass die Elektricitätseinheit den Strom nach keiner Richtung zu bewegen sucht, sondern auch, dass sie ihn um keine Axe zu drehen sucht, und daraus ergeben sich ebenfalls gewisse Gleichungen.

Da die Wahl der Axe beliebig ist, so wollen wir die durch den Punkt x', y', z' gehende, der z-Axe parallele Gerade als Axe wählen, und für sie das Drehungsmoment bestimmen. Der obige Ausdruck für die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von der ruhenden Elektricitätseinheit erleidet, lässt sich in Folge der Gleichungen (28.) in nachstehende Form bringen:

$$h\,ds\frac{dP}{ds},$$

worin P eine durch folgende Gleichung bestimmte Grösse ist:

$$(29.)\quad P = B(x-x')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dx}{ds} + C_1(x-x')\frac{dr}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Ebenso gilt für die y-Componente jener Kraft der Ausdruck:

$$h\,ds\frac{dQ}{ds},$$

worin Q durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(30.)\quad Q = B(y-y')\frac{ds}{dt} + \left[B_1\frac{dy}{ds} + C_1(y-y')\frac{dr}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich für das Drehungsmoment dieser Kraft der Ausdruck:

$$h\left[(x-x')\frac{dQ}{ds} - (y-y')\frac{dP}{ds}\right]ds.$$

Wenn nun die ruhende Elektricitätseinheit einen geschlossenen Strom nicht zu drehen sucht, so muss das Integral dieses Ausdruckes für

jeden geschlossenen Strom Null sein. Der Ausdruck lässt sich auch so schreiben:

$$h\frac{d}{ds}[(x-x')Q-(y-y')P]ds-h\left(Q\frac{dx}{ds}-P\frac{dy}{ds}\right)ds,$$

und da hierin das erste Glied ein Differential ist, welches jedenfalls bei der Integration Null giebt, so muss auch das zweite Glied Null geben. Dieses nimmt aber, wenn für P und Q die in (29.) und (30.) gegebenen Werthe gesetzt werden, folgende Form an:

$$h\left[(x-x')\frac{dy}{ds}-(y-y')\frac{dx}{ds}\right]\cdot\left[B\frac{ds}{dt}+C_1\frac{dr}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]ds,$$

und man sieht sofort, dass dieser Ausdruck kein vollständiges Differential ist, und nur dann für jeden geschlossenen Strom das Integral Null geben kann, wenn er selbst durch den in der zweiten eckigen Klammer stehenden Factor Null wird. Damit aber dieser Factor, unabhängig von der Stromstärke, Null werde, muss sein:

$$(31.)\qquad B=0 \quad \text{und} \quad C_1=0.$$

Verbindet man diese neuen Gleichungen mit den unter (28.) gegebenen, so gehen die letzteren über in:

$$(32.)\qquad C=0;\quad B_2=\frac{dB_1}{dr};\quad C_2=0;\quad C_3=0.$$

Dadurch sind die sieben in dem Ausdrucke von X_1 vorkommenden unbestimmten Functionen auf Eine reducirt, und die Gleichung (20.) geht über in:

$$(33.)\qquad X_1=\frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

§. 8. Bestimmung der in X_3 vorkommenden Functionen.

Um nun die in X_3 vorkommenden Functionen zu bestimmen, wollen wir die gegenseitige Einwirkung zweier in ruhenden Leitern stattfindenden Ströme betrachten.

In den Punkten x, y, z und x', y', z' seien zwei Stromelemente ds und ds', welche die bewegten Elektricitätsmengen hds und $h'ds'$ und die ruhenden Elektricitätsmengen $-hds$ und $-h'ds'$ enthalten. Um nun die Kraft zu bestimmen, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, müssen wir die vier Kräfte betrachten, welche die Menge hds von den beiden Mengen $h'ds'$ und $-h'ds'$ und die Menge $-hds$ von den

beiden Mengen $h'ds'$ und $-h'ds'$ erleidet. Die in die x-Richtung fallenden Componenten dieser vier Kräfte sind:

$$hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3\right),$$

$$-hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right),$$

$$-hh'\,ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_2\right),$$

$$hh'\,ds\,ds'\,\frac{x-x'}{r^3}.$$

Durch Addition derselben erhalten wir für die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, einfach das Produkt

$$hh'\,ds\,ds'\,X_3,$$

worin wir für X_3 den in (22.) gegebenen Ausdruck anzuwenden haben.

Dem letzteren wollen wir aber erst noch eine für die Integration geeignetere Gestalt geben. Die darin vorkommende Grösse $\cos\varepsilon$ können wir durch einen Differentialcoefficienten ersetzen. Aus der Gleichung

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

erhält man nämlich durch zweimalige Differentiation:

$$(34.)\qquad \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = -2\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

und da der rechts in Klammern stehende Ausdruck nichts anderes ist, als $\cos\varepsilon$, so kommt:

$$(35.)\qquad \cos\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck für $\cos\varepsilon$ einsetzen und zugleich statt $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt'}$, wie in den vorigen Paragraphen, die Produkte $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ und $\frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{dt'}$ anwenden, so lautet die Gleichung (22.):

$$(36.)\qquad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left[B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}+B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}+\left(C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-\frac{1}{2}C_9\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right)(x-x')\right].$$

Hieraus soll nun noch das Produkt $C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$ fortgeschafft werden.

Dazu möge eine Function E von r eingeführt werden, welche zu C_8 in folgender Beziehung steht:

$$E = \int r\,dr\int\frac{C_8}{r}\,dr,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{r}\frac{dE}{dr} = \int \frac{C_4}{r} dr \quad \text{und} \quad r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right) = C_8.$$

Differentiiren wir diese Function E nach s und s', so können wir den Differentialcoefficienten folgende Formen geben:

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d(r^2)}{ds}$$

$$\frac{d^2E}{ds\,ds'} = \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right)\frac{dr}{ds'}\frac{d(r^2)}{ds}$$

$$= \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},$$

und wir erhalten daher:

$$C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{1}{2r}\frac{dE}{dr}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2E}{ds\,ds'}.$$

Setzt man diesen Werth von $C_8\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}$ in die Gleichung (36.) ein, und wendet dabei für

$$-\frac{1}{2}\left(C_9 + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right)$$

das vereinfachte Zeichen E_1 an, so kommt:

$$(37.)\qquad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left[B_6\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + B_7\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \left(E_1\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2E}{ds\,ds'}\right)(x-x')\right].$$

Ferner kann gesetzt werden:

$$\frac{d^2E}{ds\,ds'}(x-x') = \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'} + \frac{dE}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dE}{ds'}\frac{dx}{ds},$$

und wenn man dabei noch zur Vereinfachung die Zeichen E_2 und E_3 mit den Bedeutungen

$$E_2 = B_6 + \frac{dE}{dr} \quad \text{und} \quad E_3 = B_7 - \frac{dE}{dr}$$

einführt, so geht die Gleichung (37.) über in:

$$(38.)\qquad X_3 = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\left\{E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}.$$

Den so umgestalteten Ausdruck von X_3 multipliciren wir mit $hh'ds\,ds'$, um die x-Componente der Kraft zu erhalten, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet.

Führt man dann, um die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem ganzen als geschlossen vorausgesetzten Strome s' er-

leidet, zu erhalten, die Integration nach s' aus, so treten dabei einige Vereinfachungen ein. Das letzte Glied des vorigen Ausdruckes ist nämlich ein Differentialcoefficient nach s', und im vorletzten Gliede ist der Factor $\frac{dx}{ds}$ von s' unabhängig, so dass er bei der Integration als constant behandelt werden kann, und der andere Factor $E_3 \frac{dr}{ds'}$ ist wiederum ein Differentialcoefficient nach s'. Beide Glieder geben also bei der Integration über einen geschlossenen Strom den Werth Null, und es bleibt:

$$(39.) \qquad hh'ds\int X_3 ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds'.$$

Wenn man diesen Ausdruck auch noch nach s integrirt, so erhält man die Kraft, mit welcher der Strom s' den ganzen Strom s nach der x-Richtung zu verschieben sucht. Diese Integration bringt für den Fall, dass auch der Strom s geschlossen ist, wiederum ein Glied zum Verschwinden. In dem Gliede $E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}$ ist nämlich der Factor $\frac{dx'}{ds'}$ von s unabhängig und der andere Factor $E_2\frac{dr}{ds}$ ist ein Differentialcoefficient nach s und giebt somit bei der Integration Null. Es kommt also:

$$(40.) \qquad hh'\iint X_3\,ds\,ds' = hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\iint E_1(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,ds\,ds'.$$

Dieses Resultat können wir mit einem vollkommen feststehenden Ergebnisse der *Ampère*schen Theorie vergleichen, indem diese Theorie, soweit sie sich auf die von geschlossenen Strömen auf einander ausgeübten Kräfte bezieht, als durchaus zuverlässig anzusehen ist. Nun wird nach dieser Theorie die Kraft, mit welcher ein geschlossener Strom s' einen anderen geschlossenen Strom s nach der x-Richtung zu bewegen sucht, durch den Ausdruck

$$-kii'\iint\frac{x-x'}{r^3}\cos\varepsilon\,ds\,ds'$$

dargestellt, worin i und i' die beiden Stromintensitäten sind, und k eine Constante bedeutet. Diesen Ausdruck kann man, wenn man i und i' durch $h\frac{ds}{dt}$ und $h'\frac{ds'}{dt}$ und $\cos\varepsilon$, gemäss Gleichung (35.), durch $-\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}$ ersetzt, in folgende Gestalt bringen:

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\iint\frac{k}{2r^3}(x-x')\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,ds\,ds',$$

und wenn man ihn dann mit dem in (40.) gegebenen Ausdrucke vergleicht, so sieht man, dass zu setzen ist:

$$(41.) \qquad E_1 = \frac{k}{2r^3}.$$

Um auch noch die andere in (39.) vorkommende, mit E_2 bezeichnete Function zu bestimmen, wenden wir den ebenfalls thatsächlich feststehenden Satz an, *dass ein in einem ruhenden Leiter stattfindender geschlossener und constanter galvanischer Strom einen anderen in einem ruhenden Leiter stattfindenden geschlossenen galvanischen Strom in seiner Intensität nicht zu ändern sucht.*

Der in (39.) gegebene Ausdruck, welcher nach Einsetzung des eben gefundenen Werthes von E_1 lautet:

$$hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+E_2\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right]ds',$$

bedeutet seiner Entwickelung nach die x-Componente derjenigen Kraft, welche der geschlossene Strom s' auf das Stromelement ds, also auf die beiden in dem Leiterelemente ds befindlichen Elektricitätsmengen $h\,ds$ und $-h\,ds$ ausübt. Nun ist aber die negative Elektricitätsmenge $-h\,ds$ in Ruhe, und auf ruhende Elektricität kann nach dem in §. 6 angewandten Satze der geschlossene galvanische Strom keine Kraft ausüben. Demnach lässt sich der obige Ausdruck auch in dem Sinne auffassen, dass er die x-Componente derjenigen Kraft bedeutet, *welche der geschlossene Strom s' auf die in dem Leiterelemente ds befindliche positive Elektricitätsmenge $h\,ds$ ausübt.*

Um auch die in die Richtung des Elementes ds fallende und somit auf Stromverstärkung hinwirkende Componente dieser Kraft bequem darstellen zu können, wollen wir dem Ausdrucke noch eine etwas veränderte Gestalt geben. Aus der Gleichung

$$r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

folgt nämlich:

$$(42.) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(r^2)}{dx} = 2(x-x'), \\[2ex] \dfrac{d^2(r^2)}{dx\,ds'} = -2\dfrac{dx'}{ds'}. \end{cases}$$

Wenn man mittelst dieser Gleichungen $x-x'$ und $\frac{dx'}{ds'}$ aus jenem Ausdrucke eliminirt, und zugleich $\frac{dr}{ds}$ in der Form $\frac{1}{2r}\frac{d(r^2)}{ds}$ schreibt, so geht er über in:

$$\tfrac{1}{4}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k}{r^3}\frac{d(r^2)}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}-\frac{E_2}{r}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\right]ds'.$$

Will man nun statt der in die willkürlich gewählte x-Richtung fallenden Componente der Kraft die in die Richtung des Elementes ds fallende Componente haben, so braucht man nur die Differentialcoefficienten nach x durch entsprechende Differentialcoefficienten nach s zu ersetzen, wodurch man erhält:

$$\tfrac{1}{4}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left[\frac{k}{r^3}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}-\frac{E_2}{r}\frac{d(r^2)}{ds}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right]ds'$$

oder anders geschrieben:

$$\tfrac{1}{8}hh'\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}ds\int\left(\frac{k}{r^3}-\frac{E_2}{r}\right)\frac{d}{ds'}\left[\frac{d(r^2)}{ds}\right]^2 ds'.$$

Dieser Ausdruck stellt die in einem einzelnen Elemente ds im Sinne der Stromverstärkung wirkende Kraft dar. Soll nun die Intensität des Stromes ungeändert bleiben, so muss das über den ganzen geschlossenen Strom s ausgedehnte Integral dieses Ausdruckes Null sein. Das in dem Ausdrucke schon vorkommende über den Strom s' zu nehmende Integral

$$\int\left(\frac{k}{r^3}-\frac{E_2}{r}\right)\frac{d}{ds'}\left[\frac{d(r^2)}{ds}\right]^2 ds',$$

mit welchem das Element ds multiplicirt ist, muss also entweder die Form eines Differentialcoefficienten nach s haben, oder Null sein. Da nun das erstere durch keine Form der Function E_2 zu bewirken ist, so muss man E_2 so bestimmen, dass das Integral Null wird, was erfordert, dass man setzt:

$$\frac{k}{r^3}-\frac{E_2}{r} = c,$$

worin c irgend eine Constante bedeutet, indem nur dadurch der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ein Differential und somit das Integral selbst für jeden geschlossenen Strom Null werden kann.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$E_2 = \frac{k}{r^2}-cr.$$

Da nun aber das hierin vorkommende Glied $-cr$ in dem Ausdrucke von X_3 ein Glied geben würde, welches mit wachsendem Abstande r grösser würde, und ein solches Glied in dem Ausdrucke der Kraftcomponente nicht vorkommen kann, so muss die Constante c gleich Null gesetzt werden, und man erhält somit zur Bestimmung von E_2 die Gleichung:

$$(43.)\qquad E_2 = \frac{k}{r^2}.$$

Es sind also von den vier in dem unter (38.) gegebenen Ausdrucke von X_3 vorkommenden unbestimmten Functionen von r zwei be-

stimmt, und durch Einsetzung ihrer Werthe geht die Gleichung (38.) über in:

$$(44.)\quad X_3 = \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'} + E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

§. 9. Anwendung der Inductionsgesetze.

Während wir bisher nur constante Ströme in ruhenden Leitern betrachtet haben, wollen wir jetzt von der Beschränkung, dass die Ströme constant seien, absehen und ferner noch die Annahme machen, dass der Leiter s sich bewege. Der Einfachheit wegen wollen wir aber voraussetzen, dieser Leiter ändere seine Gestalt nicht, und bewege sich nur mit sich selbst parallel, so dass alle seine Elemente während des Zeitelementes dt ein gleich grosses Wegelement $d\sigma$ nach gleicher Richtung zurücklegen.

Dann hat jedes in dem Leiter s befindliche positive Elektricitätstheilchen gleichzeitig zwei Bewegungen, die, mit welcher es sich im Leiter bewegt, und deren Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ ist, und die, mit welcher der Leiter sich bewegt, und deren Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$ ist. Demnach müssen die auf die Bewegung dieses Elektricitätstheilchens bezüglichen Differentialcoefficienten nach t jetzt anders ausgedrückt werden als früher. Statt eines Ausdruckes von der Form

$$\frac{dU}{ds}\frac{ds}{dt},$$

worin U irgend eine von der Lage des Elektricitätstheilchens abhängige Grösse bedeutet, muss jetzt gesetzt werden:

$$\frac{dU}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt},$$

und statt eines Ausdruckes von der Form

$$\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + V\frac{dU}{ds}\frac{d^2s}{dt^2},$$

worin V noch irgend eine zweite von der Lage des Elektricitätstheilchens abhängige Grösse bedeutet, muss jetzt gesetzt werden:

$$\frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left[\frac{d}{d\sigma}\left(V\frac{dU}{ds}\right) + \frac{d}{ds}\left(V\frac{dU}{d\sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{d}{d\sigma}\left(V\frac{dU}{d\sigma}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$
$$+ V\frac{dU}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} + V\frac{dU}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Wollen wir nun die x-Componente der Kraft bestimmen, welche die in ds befindliche positive Elektricitätsmenge $h\,ds$ von der in ds' befindlichen

positiven Elektricitätsmenge $h'ds'$ erleidet, so haben wir für dieselbe, wie früher, den allgemeinen Ausdruck

$$hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3\right)$$

zu bilden, darin aber jetzt für X_1, X_2 und X_3 diejenigen Ausdrücke zu setzen, welche aus (33.), (27.) und (44.) durch die vorstehend angedeuteten Aenderungen hervorgehen, nämlich:

$$(45.)\quad \begin{cases} X_1 = \frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left[\frac{d}{d\sigma}\left(B_1\frac{dx}{ds}\right)+\frac{d}{ds}\left(B_1\frac{dx}{d\sigma}\right)\right]\frac{ds}{dt}\frac{d\sigma}{dt} \\ \qquad +\frac{d}{d\sigma}\left(B_1\frac{dx}{d\sigma}\right)\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2+B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}+B_1\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2\sigma}{dt^2}. \end{cases}$$

$$(46.)\quad \begin{cases} X_2 = -\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \\ \qquad +\left[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2}. \end{cases}$$

$$(47.)\quad \begin{cases} X_3 = \left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\right\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} \\ \qquad +\left\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{d\sigma}+\frac{d^2[E(x-x')]}{d\sigma\,ds'}\right\}\frac{d\sigma}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{cases}$$

Wollen wir ferner die x-Componente der Kraft bestimmen, welche die in ds befindliche positive Elektricitätsmenge hds von der in ds' befindlichen negativen Elektricitätsmenge $-h'ds'$ erleidet, so brauchen wir in den vorigen Ausdrücken nur $h'ds'$ durch $-h'ds'$ zu ersetzen und ferner, weil die in ds' befindliche negative Elektricität in Ruhe ist, $\frac{ds'}{dt}=0$ zu setzen. Dadurch wird $X_2=0$ und $X_3=0$, während X_1 ungeändert bleibt. Demnach reducirt sich der Ausdruck dieser Kraftcomponente auf

$$-hh'ds\,ds'\left(\frac{x-x'}{r^3}+X_1\right).$$

Daraus ergiebt sich für die x-Componente der Kraft, welche die in ds befindliche positive Elektricitätsmenge hds von dem Stromelemente ds', also, von den beiden Elektricitätsmengen $h'ds'$ und $-h'ds'$ zusammen, erleidet, der Ausdruck:

$$hh'ds\,ds'(X_2+X_3).$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach s', so erhält man die x-Componente der Kraft, welche die in ds befindliche positive Elektricitätsmenge hds von dem ganzen Strome s' erleidet, und es gilt also, wenn man diese Kraftcomponente mit $\mathfrak{X}hds$ bezeichnet, die Gleichung

$$(48.)\quad \mathfrak{X} = h'\int(X_2+X_3)\,ds',$$

worin man für X_2 und X_3 die unter (46.) und (47.) gegebenen Ausdrücke zu setzen hat. Bei der Ausführung der Integration geben alle in jenen Ausdrücken vorkommenden Glieder, welche die Form von Differentialcoefficienten nach s' haben, Null, und können daher fortgelassen werden, so dass man erhält:

$$(49.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = h'\dfrac{d^2s'}{dt^2}\displaystyle\int\Big[B_4\frac{dx'}{ds'}+C_5(x-x')\frac{dr}{ds'}\Big]ds' \\ \quad +kh'\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\displaystyle\int\Big[\frac{x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\Big]ds' \\ \quad +kh'\dfrac{d\sigma}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\displaystyle\int\Big[\frac{x-x'}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'}\Big]ds'. \end{cases}$$

Diese Gleichung kann man noch mittelst der schon im vorigen Paragraphen angewandten Gleichungen:

$$x-x' = r\frac{dr}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dx'}{ds'} = -\tfrac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}$$

umformen in:

$$(50.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \tfrac{1}{2}h'\dfrac{d^2s'}{dt^2}\displaystyle\int\Big[-B_4\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}+C_5\frac{dr}{dx}\frac{d(r^2)}{ds'}\Big]ds' \\ \quad +\tfrac{1}{2}kh'\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\displaystyle\int\Big[-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\Big]ds' \\ \quad +\tfrac{1}{2}kh'\dfrac{d\sigma}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\displaystyle\int\Big[-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\frac{d^2(r^2)}{dx\,ds'}\Big]ds'. \end{cases}$$

Um aus diesem auf die x-Richtung bezüglichen Ausdrucke den entsprechenden auf die Richtung des Elementes ds bezüglichen Ausdruck abzuleiten, brauchen wir wieder nur die Differentialcoefficienten nach x durch solche nach s zu ersetzen. Dann heben die unter dem zweiten Integralzeichen stehenden beiden Glieder sich gegenseitig auf, und wir erhalten, wenn wir die in die Richtung des Elementes ds fallende Componente der Kraft, welche die Elektricitätsmenge $h\,ds$ von dem Strome s' erleidet, mit $\mathfrak{S}h\,ds$ bezeichnen, die Gleichung:

$$(51.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S} = \tfrac{1}{2}h'\dfrac{d^2s'}{dt^2}\displaystyle\int\Big[-B_4\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\Big]ds' \\ \quad +\tfrac{1}{2}kh'\dfrac{d\sigma}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\displaystyle\int\Big[-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\,ds'}+\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\Big]ds'. \end{cases}$$

Das Produkt $\mathfrak{S}ds$ ist dasjenige, was man *die in dem Leiterelemente*

***ds* inducirte elektromotorische Kraft** nennt, und demnach stellt das Integral $\int \mathfrak{S}\, ds$ die in dem ganzen Leiter s inducirte elektromotorische Kraft dar.

Die Integration nach s bringt wieder ein Glied zum Verschwinden. Betrachten wir nämlich das Doppelintegral

$$\iint \frac{d\frac{1}{r}}{ds} \frac{d^2(r^2)}{d\sigma\, ds'} ds\, ds',$$

so ist zu bemerken, dass die Grösse

$$\frac{d^2(r^2)}{d\sigma\, ds'} = -2\left(\frac{dx}{d\sigma}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{d\sigma}\frac{dz'}{ds'}\right),$$

welche wir auch durch $-2\cos(\sigma s')$ bezeichnen können, wenn $(\sigma s')$ den Winkel zwischen dem von ds zurückgelegten Bahnelemente $d\sigma$ und dem Stromelemente ds' bedeutet, von s unabhängig ist, weil der ganze Leiter s sich mit sich selbst parallel bewegt, und somit alle seine Elemente eine und dieselbe Bahnrichtung haben. Man kann also das obige Integral so schreiben:

$$\int ds' \frac{d^2(r^2)}{d\sigma\, ds'} \int \frac{d\frac{1}{r}}{ds} ds.$$

Hierin lässt sich die Integration nach s sofort ausführen, und giebt für einen geschlossenen Strom Null.

Betrachten wir ferner das andere Doppelintegral

$$\iint \frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma} \frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'} ds\, ds',$$

so können wir hierin, da der Differentialcoefficient $\frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'}$, welcher nach (35.) gleich $-2\cos\varepsilon$ ist, sich bei der Bewegung des Leiters s nicht ändert, und somit von σ unabhängig ist, setzen:

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\sigma} \frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'} = \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'}\right],$$

und da ferner die Grösse σ, nach welcher hier differentiirt werden soll, von den Grössen s und s', nach welchen der ganze Ausdruck integrirt werden soll, unabhängig ist, so können wir die Differentiation nach σ auch ausserhalb der Integralzeichen andeuten, und demnach statt des obigen Doppelintegrals schreiben:

$$\frac{d}{d\sigma} \iint \frac{1}{r} \frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'} ds\, ds'.$$

Wir erhalten daher zur Bestimmung der im Leiter s inducirten elektromotorischen Kraft die Gleichung:

$$(52.)\quad \begin{cases} \int \mathfrak{S}\,ds = \frac{1}{2}h'\frac{d^2s'}{dt^2}\iint\left[-B_4\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds\,ds' \\ \qquad +\frac{1}{2}kh'\frac{ds'}{dt}\frac{d\sigma}{dt}\frac{d}{d\sigma}\iint\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}ds\,ds'. \end{cases}$$

Auf diese Gleichung wollen wir nun den Satz anwenden, ***dass, wenn entweder der Leiter s in einer bestimmten Lage in der Nähe des Leiters s' verharrt, aber im letzteren die Stromstärke von Null bis zu einem gegebenen Werthe wächst, oder die Stromstärke in s' unveränderlich diesen Werth hat, aber s sich aus unendlicher Entfernung bis zu jener Lage heranbewegt, in beiden Fällen eine gleich grosse Inductionswirkung in s stattfindet.***

Um die während irgend einer Zeit stattfindende Inductionswirkung zu bestimmen, haben wir den Ausdruck, welcher die inducirte elektromotorische Kraft darstellt, mit dt zu multipliciren und dann über die betreffende Zeit zu integriren. Im ersten der beiden vorher genannten Fälle ist nun $\frac{d\sigma}{dt}=0$, so dass das zweite Glied des in (52.) gegebenen Ausdruckes verschwindet, und im ersten Gliede ist das Doppelintegral von der Zeit unabhängig und nur der als Factor vor demselben stehende Differentialcoefficient $\frac{d^2s'}{dt^2}$ ist nach t zu integriren und giebt $\frac{ds'}{dt}$. Die in diesem Falle stattfindende Inductionswirkung ist daher:

$$\frac{1}{2}h'\frac{ds'}{dt}\iint\left[-B_4\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds\,ds'.$$

Im zweiten Falle ist $\frac{d^2s'}{dt^2}=0$, so dass das erste Glied des Ausdruckes verschwindet, und das zweite Glied lässt sich sofort nach t integriren, und giebt:

$$\frac{1}{2}kh'\frac{ds'}{dt}\iint\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}ds\,ds'.$$

Diese beiden Grössen müssen, jenem Satze nach, unter einander gleich sein, ihre Differenz muss also den Werth Null haben, und man erhält daher die Gleichung:

$$(53.)\quad \iint\left[\left(\frac{k}{r}+B_4\right)\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}-C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'}\right]ds\,ds' = 0.$$

Das zweite in der eckigen Klammer stehende Glied können wir noch so umändern:

$$C_5\frac{dr}{ds}\frac{d(r^2)}{ds'} = \frac{d}{ds}\left[\frac{d(r^2)}{ds'}\int C_5\,dr\right]-\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\int C_5\,dr,$$

und da von den beiden hier auf der rechten Seite stehenden Gliedern das erste bei der Integration über einen geschlossenen Strom s Null wird, so geht die vorige Gleichung über in:

$$(54.)\qquad \iint\left[\frac{k}{r}+B_4+\int C_5\,dr\right]\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,ds\,ds' = 0.$$

Wenn diese Gleichung für jede zwei geschlossene Ströme erfüllt sein soll, so muss der vor dem Differentialcoefficienten zweiter Ordnung als Factor stehende Ausdruck constant sein, und wir können also, wenn a eine Constante bedeutet, setzen:

$$(55.)\qquad \frac{k}{r}+B_4+\int C_5\,dr = a.$$

Fassen wir nun das Integral mit der Constanten a in ein Zeichen zusammen, indem wir setzen:

$$G = \int C_5\,dr - a,$$

so erhalten wir:

$$(56.)\qquad \begin{cases} B_4 = -\left(\dfrac{k}{r}+G\right), \\ C_5 = \dfrac{dG}{dr}. \end{cases}$$

Hierdurch sind wieder zwei der unbestimmten Functionen, welche in dem Ausdrucke von X_2 noch vorkommen, auf Eine zurückgeführt, und die unter (27.) gegebene zur Bestimmung von X_2 dienende Gleichung geht jetzt über in:

$$X_2 = -\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds'}\left[-\left(\frac{k}{r}+G\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{dG}{dr}(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$$
$$+\left[-\left(\frac{k}{r}+G\right)\frac{dx'}{ds'}+\frac{dG}{dr}(x-x')\frac{dr}{ds'}\right]\frac{d^2s'}{dt^2}$$

oder anders geschrieben:

$$(57.)\qquad \begin{cases} X_2 = -\dfrac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\dfrac{ds'}{dt}+\dfrac{d}{ds'}\left\{-\dfrac{k}{r}\dfrac{dx'}{ds'}+\dfrac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\left(\dfrac{ds'}{dt}\right)^2 \\ \qquad\qquad +\left\{-\dfrac{k}{r}\dfrac{dx'}{ds'}+\dfrac{d[G(x-x')]}{ds'}\right\}\dfrac{d^2s'}{dt^2}. \end{cases}$$

§. 10. Zusammenfassung der bisher gewonnenen Resultate.

Nachdem durch die in den Paragraphen 6. bis 9. angestellten Betrachtungen die Ausdrücke von X_1, X_2 und X_3 die unter (33.), (57.) und

(44.) gegebenen vereinfachten Formen gewonnen haben, wollen wir sie in die Gleichung (23.), nämlich

$$X = \frac{x-x'}{r^3}+X_1+X_2+X_3$$

einsetzen. Dadurch erhalten wir zur Bestimmung der x-Componente der Kraft, die ein Elektricitätstheilchen, welches während der Zeit dt den Weg ds zurücklegt, von einem anderen, welches während derselben Zeit den Weg ds' zurücklegt, erleidet, die Gleichung:

$$\begin{aligned} X = & \frac{x-x'}{r^3}+\frac{d}{ds}\Big(B_1\frac{dx}{ds}\Big)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2+B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{d[B_3(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt} \\ & +\frac{d}{ds'}\Big\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\Big\}\Big(\frac{ds'}{dt}\Big)^2+\Big\{-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\Big\}\frac{d^2s'}{dt^2} \\ & +\Big\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}+E_3\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\Big\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}$$

Hierin lassen sich einige Vereinfachungen machen. Bedenkt man, dass x' nur von s', dagegen r von s und s' abhängt, so sieht man, dass man schreiben kann:

$$-\frac{d}{ds'}\Big(\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\Big)\Big(\frac{ds'}{dt}\Big)^2-\frac{k}{r}\frac{dx'}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}+\frac{k}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt} = -k\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\Big),$$

wodurch sich drei der oben vorkommenden Glieder in eines zusammenziehen. Ferner kann man aus denselben Gründen schreiben:

$$\frac{d}{ds}\Big(B_1\frac{dx}{ds}\Big)\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2+B_1\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(B_1\frac{dx}{dt}\Big)-\frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Setzt man dabei zur Abkürzung:

$$E_3\frac{dr}{ds'}-\frac{dB_1}{dr}\frac{dr}{ds'} = \frac{dF}{ds'}$$

und führt noch für B_1 und $-B_3$ die einfacheren Zeichen H und J ein, so nimmt die zur Bestimmung von X dienende Gleichung folgende Form an:

$$(58.)\quad \left\{\begin{aligned} X = & \frac{x-x'}{r^3}+\frac{d[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\Big(\frac{ds'}{dt}\Big)^2 \\ & +\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}+\frac{d}{dt}\Big(H\frac{dx}{dt}\Big)-k\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\Big) \\ & +\Big\{\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\Big\}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung sind neben der Annahme, dass nur Eine Elektricität im festen Leiter strömen könne, nur solche Sätze zur Anwendung gebracht, welche sich auf die gegenseitige Einwirkung ge-

schlossener Ströme beziehen, und da diese Sätze als vollkommen sicher zu betrachten sind, so darf behauptet werden, dass der in dieser Gleichung gegebene Ausdruck von X unter der Voraussetzung von nur Einer im festen Leiter beweglichen Elektricität der *einzig mögliche* ist.

Dabei ist noch zu bemerken, dass die Zulässigkeit dieses Ausdruckes nicht auf den Fall, wo nur Eine Elektricität als strömend vorausgesetzt wird, beschränkt ist, sondern dass er auch dann zulässig bleibt, wenn man annimmt, der galvanische Strom bestehe aus zwei nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Strömen von positiver und negativer Elektricität, wobei es gleichgültig ist, ob man diese beiden Ströme ihrer Stärke nach als gleich oder verschieden annimmt.

Wenn man zu den im Obigen angewandten Sätzen noch die Bedingung hinzufügen wollte, dass die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung nach einem einheitlichen Gesetze stattfinden müsse, so würde man aus der blossen Vergleichung der Glieder, welche noch unbestimmte Functionen von r enthalten, mit denen, in welchen die Functionen schon bestimmt sind, noch weitere Schlüsse über die Form der Functionen ziehen können, und zwar würde man durch diese Betrachtungen zu dem Ergebnisse gelangen, dass die Functionen E, F, G und H sämmtlich die Form $\frac{1}{r}\cdot\text{const.}$ haben müssten, so dass also statt jener unbestimmten Functionen nur noch unbestimmte Constante in dem Ausdrucke von X bleiben würden. Indessen wollen wir uns Schlüsse dieser Art für jetzt nicht erlauben, sondern statt dessen noch einen allgemeinen Satz in Anwendung bringen.

§. 11. Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie.

Wir wollen nun die Annahme machen, dass die Kräfte, welche zwei bewegte Elektricitätstheilchen auf einander ausüben, für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen, wozu erforderlich ist, dass die Arbeit, welche diese Kräfte bei der Bewegung der Theilchen während des Zeitelementes dt thun, durch das Differential einer von den augenblicklichen Lagen und Bewegungszuständen der Theilchen abhängigen Grösse dargestellt wird.

Um die Arbeit bestimmen zu können, denken wir uns neben dem unter (58.) gegebenen Ausdrucke von X die entsprechenden Ausdrücke von Y und Z gebildet, und ebenso denken wir uns die Grössen X', Y' und Z', welche sich auf die Kraft beziehen, die das Theilchen e' von dem Theilchen e

erleidet, in entsprechender Weise ausgedrückt, wozu nur die accentuirten und unaccentuirten Buchstaben gegen einander vertauscht zu werden brauchen. Unter Anwendung dieser Ausdrücke bilden wir die Grösse

$$ee'\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}\right)dt.$$

Diese Grösse muss, wenn das Princip von der Erhaltung der Energie erfüllt sein soll, das vollständige Differential oder, anders gesagt, die in der Klammer stehende Summe von sechs Produkten muss der nach t genommene Differentialcoefficient eines aus den Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der beiden Theilchen gebildeten Ausdruckes sein.

Da der unter (58.) gegebene Ausdruck von X etwas lang ist, so wollen wir seine Glieder einzeln oder in kleinen Gruppen nach einander betrachten, um zu sehen, wie bei ihnen die Summe der sechs Produkte sich gestaltet.

Das *erste* Glied ist

$$\frac{x-x'}{r^3} \quad \text{oder} \quad -\frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

und die Summe der sechs Produkte lautet daher:

$$-\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dy'}\frac{dy'}{dt}+\frac{d\frac{1}{r}}{dz'}\frac{dz'}{dt}\right)$$

und lässt sich zusammenziehen in:

$$-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}.$$

Das *zweite* Glied ist:

$$\frac{d[J(x-x')]}{ds'}\frac{ds'}{dt}.$$

Um dieses mit dem Differentialcoefficienten $\frac{dx}{dt}$ zu multipliciren, zerlegen wir den letzteren in das Produkt $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ und multipliciren mit dem Factor $\frac{dx}{ds}$, welcher von s' unabhängig ist, unter dem Differentiationszeichen, also:

$$\frac{d\left[J(x-x')\frac{dx}{ds}\right]}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Bildet man hierzu die entsprechenden Produkte für die y- und z-Axe und addirt zunächst nur diese drei Produkte, indem man dabei die Gleichung

$$(x-x')\frac{dx}{ds}+(y-y')\frac{dy}{ds}+(z-z')\frac{dz}{ds} = r\frac{dr}{ds}$$

berücksichtigt, so erhält man:

$$\frac{d\left(Jr\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Ebenso geben die drei anderen Produkte:

$$\frac{d\left(Jr\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Diese beiden Ausdrücke sind unter einander gleich, indem sich, wenn man das Zeichen K mit der Bedeutung

$$(59.)\qquad K = \int Jr\,dr$$

einführt, der als erster Factor stehende Differentialcoefficient in beiden durch $\frac{d^2K}{ds\,ds'}$ darstellen lässt, und die Summe der sechs Produkte nimmt daher folgende Form an:

$$2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Das *dritte* und *vierte* Glied von (58.), nämlich

$$\frac{d^2[G(x-x')]}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d[G(x-x')]}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

kann man ganz ähnlich behandeln. Durch Addition der drei ersten Produkte erhält man:

$$\frac{d^2\left[Gr\frac{dr}{ds}\right]}{ds'^2}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d\left[Gr\frac{dr}{ds}\right]}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

wofür man, wenn man das Zeichen R mit der Bedeutung

$$(60.)\qquad R = \int Gr\,dr$$

einführt, schreiben kann:

$$\frac{d^3R}{ds\,ds'^2}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s'}{dt^2},$$

und ebenso geben die drei anderen Produkte:

$$\frac{d^3R}{ds^2\,ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds'}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Die Summe aller sechs Produkte ist also:

$$\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'^2}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds^2\,ds'}\frac{ds}{dt}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2s'}{dt^2}+\frac{ds'}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right),$$

was sich zunächst zusammenziehen lässt in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)$$

und dann weiter in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Das *fünfte* Glied

$$\frac{d}{dt}\left(H\frac{dx}{dt}\right)$$

giebt, wenn man zuerst die angedeutete Differentiation ausführt, und dann mit $\frac{dx}{dt}$ multiplicirt:

$$\frac{dH}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+H\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2},$$

was sich auch in folgender Form schreiben lässt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[H\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

In gleicher Weise erhält man als anderes, auch auf die x-Axe bezügliches, aber das accentuirte x enthaltendes Produkt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[H\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2.$$

Bildet man nun die entsprechenden Produkte für die y- und z-Axe, so kann man die Summe aller sechs Produkte zusammenziehen in:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right].$$

Das *sechste* Glied

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$$

giebt durch Ausführung der angedeuteten Differentiation und durch Multiplication mit $\frac{dx}{dt}$:

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}-k\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x'}{dt^2}.$$

In gleicher Weise erhält man wieder als anderes auch auf die x-Axe bezügliches Produkt, in welchem aber das accentuirte und das unaccentuirte x gegen einander vertauscht sind:

$$-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}-k\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Die Summe dieser beiden Produkte kann man in folgender Form schreiben:

$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}\right)-k\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}.$$

Bildet man nun die entsprechenden Produkte für die y- und z-Axe und berücksichtigt dabei die Gleichung

$$\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}=-\tfrac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

so erhält man als Summe aller sechs Produkte:

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)+\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Das *siebente* Glied

$$\frac{k(x-x')}{2r^3}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

oder, anders geschrieben,

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

giebt als Summe der sechs Produkte:

$$-\frac{k}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Dieser Ausdruck hebt sich gegen einen Theil des beim sechsten Gliede erhaltenen Ausdruckes auf, so dass man für das sechste und siebente Glied zusammen als Summe der sechs Produkte einfach erhält:

$$\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right).$$

Das *achte* Glied

$$\frac{dF}{ds'}\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

giebt als Summe der sechs Produkte, wie man leicht sieht:

$$\frac{dF}{ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Das *neunte* und letzte Glied

$$\frac{d^2[E(x-x')]}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

schreiben wir zunächst in der Form:

$$\frac{d}{ds'}\left[\frac{dE}{ds}(x-x')+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

welche wir auch noch so umändern können:

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dx}+E\frac{dx}{ds}\right]\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Zugleich setzen wir für $\frac{dx}{dt}$ das Produkt $\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}$ und multipliciren mit $\frac{dx}{ds}$ unter dem Differentiationszeichen. Wenn wir dann die entsprechenden Produkte für die y- und z-Axe bilden, und die Summe dieser drei Produkte nehmen, so erhalten wir:

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt},$$

und somit als Summe aller sechs Produkte:

$$\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Vereinigen wir nun alle bei den einzelnen Gliedern von (58.) als Summe der sechs Produkte gewonnenen Ausdrücke, so erhalten wir folgende Gesammtsumme:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d\frac{1}{r}}{dt}+2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{dt}\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\\
&+\frac{k}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right)+\frac{dF}{ds'}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\\
&+\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2,
\end{aligned}$$

welche Gesammtsumme wir auch, unter Zusammenfassung der Glieder, welche Differentialcoefficienten nach t sind, und etwas veränderter An-

ordnung der übrigen Glieder, so schreiben können:

$$\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{r}+\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\tfrac{1}{2}H\left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2\right]\right\}$$

$$+2\frac{d^2K}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3+\tfrac{1}{2}\frac{dH}{ds'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^3$$

$$+\frac{d}{ds'}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+E+F+\tfrac{1}{2}H\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{ds'}{dt}$$

$$+\frac{d}{ds}\left[r\frac{dE}{dr}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2+E+F+\tfrac{1}{2}H\right]\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2.$$

Dieser ganze Ausdruck muss, wenn das Princip von der Erhaltung der Energie für die Kräfte, welche die beiden Elektricitätstheilchen auf einander ausüben, erfüllt sein soll, ein Differentialcoefficient nach t sein. Da nun der erste Theil des Ausdruckes schon äusserlich als Differentialcoefficient nach t bezeichnet ist, so haben wir unser Augenmerk nur auf den übrigen, aus fünf Gliedern bestehenden Theil zu richten. Diese Glieder sind alle in Bezug auf die Differentialcoefficienten erster Ordnung $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$ von höherem als erstem Grade, während die Differentialcoefficienten zweiter Ordnung $\frac{d^2s}{dt^2}$ und $\frac{d^2s'}{dt^2}$ in ihnen nicht als Factoren vorkommen. Daraus folgt, dass weder ein einzelnes der Glieder noch irgend eine Gruppe derselben ein Differentialcoefficient nach t sein kann. Demnach muss die Summe dieser fünf Glieder Null sein, und das wiederum kann für beliebige Werthe von $\frac{ds}{dt}$ und $\frac{ds'}{dt}$ nur dann der Fall sein, wenn alle fünf Glieder einzeln Null sind. Wir erhalten also folgende fünf Bedingungsgleichungen:

$$(61.)\quad\begin{cases}\dfrac{d^2K}{ds\,ds'}=0,\\[2mm] \dfrac{dH}{ds}=0,\\[2mm] \dfrac{dH}{ds'}=0,\\[2mm] \dfrac{d}{ds'}\left[r\dfrac{dE}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2+E+F+\tfrac{1}{2}H\right]=0,\\[2mm] \dfrac{d}{ds}\left[r\dfrac{dE}{dr}\left(\dfrac{dr}{ds'}\right)^2+E+F+\tfrac{1}{2}H\right]=0.\end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen, welche sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{dK}{dr}\frac{d^2r}{ds\,ds'}+\frac{d^2K}{dr^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}=0,$$

kann für beliebige Bahnen der Elektricitätstheilchen nur dann erfüllt sein, wenn

$$\frac{dK}{dr} = 0,$$

woraus nach (59.) weiter folgt:

$$(62.)\qquad J = 0.$$

Die beiden folgenden der Gleichungen (61.), nämlich

$$\frac{dH}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dH}{ds'} = 0,$$

geben zunächst:

$$H = \text{const.}$$

Da aber der in (58.) gegebene Ausdruck von X das Glied $H\frac{d^2x}{dt^2}$ enthält, welches, wenn H einen angebbaren constanten Werth hätte, einen von der gegenseitigen Entfernung der Elektricitätstheilchen unabhängigen Bestandtheil der Kraft darstellen würde, und ein solcher nicht vorkommen kann, so muss sein:

$$(63.)\qquad H = 0.$$

Die beiden letzten der Gleichungen (61.) lauten, wenn man $H = 0$ setzt und die angedeuteten Differentiationen ausführt:

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\frac{dr}{ds'} + 2r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d(E+F)}{dr}\frac{dr}{ds'} = 0,$$

$$\frac{d\left(r\frac{dE}{dr}\right)}{dr}\frac{dr}{ds}\left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 + 2r\frac{dE}{dr}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{d(E+F)}{dr}\frac{dr}{ds} = 0,$$

welche Gleichungen nur dann für beliebige Bahnen der Elektricitätstheilchen erfüllt sein können, wenn man hat:

$$(64.)\qquad \frac{dE}{dr} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dF}{dr} = 0,$$

wodurch E und F genügend bestimmt sind, da nur die Differentialcoefficienten dieser Grössen in (58.) vorkommen.

Nach diesen Bestimmungen nimmt der Ausdruck der von den gegenseitigen Kräften der beiden Elektricitätstheilchen während des Zeitelementes dt geleisteten Arbeit folgende einfache Gestalt an:

$$ee'\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{r} + \left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right]dt,$$

und die Gleichung (58.) geht über in:

$$(65.)\quad \begin{cases} X = \dfrac{x-x'}{r^3} + \dfrac{d^2\left(\dfrac{dR}{dr}\dfrac{x-x'}{r}\right)}{ds'^2}\left(\dfrac{ds'}{dt}\right)^2 + \dfrac{d\left(\dfrac{dR}{dr}\dfrac{x-x'}{r}\right)}{ds'}\dfrac{d^2s'}{dt^2} \\ \qquad -k\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dx'}{dt}\right) + \dfrac{k(x-x')}{2r^3}\dfrac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}, \end{cases}$$

welche Gleichung sich noch einfacher so schreiben lässt:

$$(66.)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{d\dfrac{1}{r}}{dx}\left(1+\dfrac{k}{2}\dfrac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\right) - k\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dx'}{dt}\right) \\ \qquad + \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{d^2R}{ds'^2}\left(\dfrac{ds'}{dt}\right)^2 + \dfrac{dR}{ds'}\dfrac{d^2s'}{dt^2}\right]. \end{cases}$$

§. 12. Das elektrodynamische Potential.

Nach dem vorher angeführten Ergebnisse unserer Betrachtungen wird die Arbeit, welche die von zwei bewegten Elektricitätstheilchen auf einander ausgeübten Kräfte während des Zeitelementes dt leisten, dargestellt durch das Differential des folgenden Ausdruckes:

$$-ee'\left[\frac{1}{r} - \left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\right].$$

Nun wird bekanntlich bei der Betrachtung der elektrostatischen Kräfte diejenige Grösse, deren negatives Differential die Arbeit darstellt, das *Potential* der beiden Elektricitätstheilchen auf einander genannt, und dem entsprechend kann man auch den vorstehenden, nur durch Fortlassung des äusseren Minuszeichens abgeänderten Ausdruck als *Potential* im erweiterten Sinne bezeichnen. Dabei kann man auch die beiden Theile, welche sich auf die elektrostatischen und auf die von der Bewegung abhängigen oder elektrodynamischen Kräfte beziehen, einzeln betrachten und danach das *elektrostatische* und das *elektrodynamische* Potential von einander unterscheiden. Bezeichnen wir das erstere mit U und das letztere mit V, so ist dem Vorigen nach zu setzen:

$$(67.)\quad U = \frac{ee'}{r},$$

$$(68.)\quad V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Der hier gegebene Ausdruck des elektrodynamischen Potentials ist bei der Annahme von nur Einer im festen Leiter beweglichen Elektricität der einzig mögliche.

Die in ihm noch vorkommende, mit R bezeichnete unbestimmte Function von r lässt sich aus den Wirkungen geschlossener Ströme überhaupt nicht bestimmen, und man ist daher, wenn man auch sie noch bestimmen will, für jetzt auf Wahrscheinlichkeitsgründe angewiesen.

Macht man die schon am Ende des §. 10 erwähnte Annahme, dass die Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung nach einem einheitlichen Gesetze stattfinden müsse, so gelangt man zu dem Schlusse, dass

$$(69.)\qquad R = k_1 r$$

zu setzen ist, worin k_1 eine Constante bedeutet. Dadurch geht (68.) über in:

$$(70.)\qquad V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + k_1\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Sucht man ferner noch durch Bestimmung der Constanten k_1 diesen Ausdruck möglichst einfach zu machen, so findet man zunächst, dass zwei Werthe sich in dieser Beziehung besonders auszeichnen, nämlich $k_1 = 0$ und $k_1 = -k$, welche geben:

$$(71.)\qquad V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

$$(72.)\qquad V = -k\frac{ee'}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Diese beiden Formeln sind äusserlich nahe gleich einfach; benutzt man sie aber zu Rechnungen, indem man aus ihnen die Kraftcomponenten zu bestimmen sucht, so findet man, dass für diese aus der ersteren Formel viel einfachere Ausdrücke entstehen, als aus der letzteren, und man wird also, wenn man dasjenige Kraftgesetz erhalten will, welches, während es allen bis jetzt bekannten Erscheinungen entspricht, zugleich möglichst einfach ist, $k_1 = 0$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $R = 0$ zu setzen haben.

Da der Ausdruck des elektrodynamischen Potentials kürzer und übersichtlicher ist, als diejenigen der Kraftcomponenten, so ist er ganz besonders dazu geeignet, die verschiedenen bis jetzt aufgestellten elektrodynamischen Grundgesetze (mit Ausnahme des *Gauss*schen, welches dem Princip von der Erhaltung der Energie nicht genügt) unter einander zu vergleichen, und es möge hier eine Zusammenstellung der Art Platz finden. Die zur Bestimmung des elektrodynamischen Potentials dienende Gleichung ist

1) nach *Weber**):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

2) nach *Riemann***):

$$V = -\frac{1}{c^2}\frac{ee'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

3) nach den von mir ausgeführten Entwickelungen

a) in allgemeinster Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+\frac{d^2R}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

b) in vereinfachter Form:

$$V = -ee'\left(\frac{k}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}+k_1\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt},$$

c) in einfachster und daher wahrscheinlichster Form:

$$V = -k\frac{ee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Dem letzten Ausdrucke kann man auch folgende Gestalt geben:

$$(73.)\qquad V = k\frac{ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

oder, wenn man mit v und v' die Geschwindigkeiten der beiden Elektricitätstheilchen und mit ε den Winkel zwischen ihren Bewegungsrichtungen bezeichnet:

$$(74.)\qquad V = k\frac{ee'}{r}vv'\cos\varepsilon.$$

§. 13. Ableitung der Kraftcomponenten aus dem Potential.

Um nun aus dem elektrostatischen und elektrodynamischen Potential wiederum die Kraftcomponenten abzuleiten, hat man Gleichungen anzuwenden, in denen das elektrodynamische Potential in derselben Weise vorkommt, wie in den auf allgemeine Coordinaten bezüglichen mechanischen Grundgleichungen von *Lagrange* die lebendige Kraft. Für die in die x-Richtung fallende Componente der Kraft, welche das Theilchen e erleidet, lautet die Gleichung:

$$(75.)\qquad Xee' = \frac{d(V-U)}{dx}-\frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}\right).$$

*) *Pogg.* Ann. Jubelband S. 212.

**) Schwere, Elektricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von *Bernh. Riemann* bearbeitet von *Hattendorff,* Hannover 1876, S. 326.

Hierin hat man für U und V die unter (67.) und (68.) gegebenen Ausdrücke einzusetzen. Aus dem ersteren erhält man einfach:

$$(76.)\qquad \frac{dU}{dx} = ee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}.$$

Den letzteren, welcher bei der Differentiation als Function der sechs Coordinaten und der sechs Geschwindigkeitscomponenten zu behandeln ist, wollen wir so umformen, dass die Geschwindigkeitscomponenten explicite in ihm vorkommen. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir dabei V in zwei Theile zerlegen, indem wir setzen:

$$(77.)\qquad V = V_1 + V_2,$$

worin V_1 und V_2 folgende Bedeutungen haben:

$$V_1 = -\frac{kee'}{2r}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

$$= \frac{kee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

$$V_2 = -ee'\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

$$= -ee'\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2R}{dx\,dx'}\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{d^2R}{dx\,dy'}\frac{dx}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{d^2R}{dx\,dz'}\frac{dx}{dt}\frac{dz'}{dt} \\ +\frac{d^2R}{dy\,dx'}\frac{dy}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{d^2R}{dy\,dy'}\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{d^2R}{dy\,dz'}\frac{dy}{dt}\frac{dz'}{dt} \\ +\frac{d^2R}{dz\,dx'}\frac{dz}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{d^2R}{dz\,dy'}\frac{dz}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{d^2R}{dz\,dz'}\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt} \end{array}\right\}.$$

Dann erhalten wir für den ersten Theil:

$$(78.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{dV_1}{dx} = kee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dz'}{dt}\right) \\ \qquad = -\frac{k}{2}ee'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}, \\ \frac{dV_1}{d\frac{dx}{dt}} = \frac{kee'}{r}\frac{dx'}{dt}, \end{array}\right.$$

$$(79.)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dV_1}{d\frac{dx}{dt}}\right) = kee'\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right);$$

und für den zweiten Theil erhalten wir:

$$(80.)\begin{cases} \dfrac{dV_2}{dx} = -ee'\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{d^2R}{ds\,ds'}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\Big), \\ \dfrac{dV_2}{d\dfrac{dx}{dt}} = -ee'\Big(\dfrac{d^2R}{dx\,dx'}\dfrac{dx'}{dt}+\dfrac{d^2R}{dx\,dy'}\dfrac{dy'}{dt}+\dfrac{d^2R}{dx\,dz'}\dfrac{dz'}{dt}\Big) \\ \qquad = -ee'\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{dR}{dx'}\dfrac{dx'}{dt}+\dfrac{dR}{dy'}\dfrac{dy'}{dt}+\dfrac{dR}{dz'}\dfrac{dz'}{dt}\Big) \\ \qquad = -ee'\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{dR}{ds'}\dfrac{ds'}{dt}\Big), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{dx}\Big(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\Big)\Big],$$

was sich auch so schreiben lässt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dx}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{dR}{ds'}\frac{ds'}{dt}\Big)\Big]$$

oder endlich:

$$(81.)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dV_2}{d\frac{dx}{dt}}\right) = -ee'\frac{d}{dx}\Big[\frac{d^2R}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}+\frac{d^2R}{ds'^2}\Big(\frac{ds'}{dt}\Big)^2+\frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\Big].$$

Setzt man nun die unter (76.), (78.), (79.), (80.) und (81.) gegebenen Ausdrücke in die Gleichung (75.) ein, nachdem man in der letzteren V durch V_1+V_2 ersetzt hat, so erhält man:

$$X = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\Big[1+\frac{k}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}\Big]-k\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\Big) + \frac{d}{dx}\Big[\frac{d^2R}{ds'^2}\Big(\frac{ds'}{dt}\Big)^2+\frac{dR}{ds'}\frac{d^2s'}{dt^2}\Big],$$

welches die oben unter (66.) gegebene Gleichung ist.

Die Rechnung vereinfacht sich offenbar sehr, wenn man für R den Werth Null annimmt, welcher in §. 12 als der wahrscheinlichste bezeichnet wurde. Dann erhält man:

$$(82.)\begin{cases} X = -\dfrac{d\frac{1}{r}}{dx}\Big(1+\dfrac{k}{2}\dfrac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\dfrac{ds}{dt}\dfrac{ds'}{dt}\Big)-k\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{r}\dfrac{dx'}{dt}\Big) \\ \quad = -\dfrac{d\frac{1}{r}}{dx}\Big[1-k\Big(\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dx'}{dt}+\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dy'}{dt}+\dfrac{dz}{dt}\dfrac{dz'}{dt}\Big)\Big]-k\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{r}\dfrac{dx'}{dt}\Big) \\ \quad = -\dfrac{d\frac{1}{r}}{dx}(1-kvv'\cos\varepsilon)-k\dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{r}\dfrac{dx'}{dt}\Big). \end{cases}$$

In dieser Form habe ich die Gleichung, welche zur Bestimmung der in

eine Coordinatenrichtung fallenden Kraftcomponente dient, und sich natürlich für die beiden anderen Coordinatenrichtungen auf entsprechende Art bilden lässt, in meiner vorläufigen Mittheilung vom Feb. d. J. aufgestellt.

§. 14. Kraftgesetz für Stromelemente.

Will man die x-Componente der Kraft bestimmen, welche ein Stromelement ds von einem Stromelemente ds' erleidet, so hat man die unter (66.) gegebene Gleichung auf folgende vier Combinationen von je zwei Elektricitätsmengen anzuwenden: hds und $h'ds'$, hds und $-h'ds'$, $-hds$ und $h'ds'$, $-hds$ und $-h'ds'$, indem man dabei hds und $h'ds'$ als bewegt, dagegen $-hds$ und $-h'ds'$ als ruhend betrachtet. Von den dadurch erhaltenen vier Ausdrücken hat man die algebraische Summe zu nehmen. Man gelangt dadurch für die gesuchte Kraftcomponente zu dem Ausdrucke:

$$hh'dsds'k\left(-\frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{d^2(r^2)}{dsds'}-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}$$

oder anders geschrieben:

$$hh'dsds'k\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds'}{dt}.$$

Bezeichnet man die Stromintensität, d. h. die während der Zeiteinheit durch einen Querschnitt fliessende Elektricitätsmenge, für die beiden Ströme mit i und i', indem man sich dabei die Elektricitätsmenge nach demselben mechanischen Maasse gemessen denkt, welches in allen obigen Gleichungen angewandt ist, so kann man i und i' an die Stelle der Producte $h\frac{ds}{dt}$ und $h'\frac{ds'}{dt}$ setzen, und erhält dann für die x-Componente der Kraft, welche das Stromelement ds von dem Stromelemente ds' erleidet, den Ausdruck:

$$kii'dsds'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\varepsilon-\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\frac{dx'}{ds'}\right).$$

In diesem Ausdrucke kommt die unbestimmte Function R nicht vor, sondern sie hat sich bei der Bildung der oben erwähnten Summe fortgehoben. Wir haben also für die in eine gegebene Richtung fallende Componente der Kraft, welche ein Stromelement von einem andern erleidet, einen vollkommen bestimmten Ausdruck gewonnen, von dem wir sagen dürfen, dass er der einzige ist, welcher sich mit den beiden Annahmen, dass nur Eine Elektricität im festen Leiter beweglich sei, und dass die gegenseitigen Einwirkungen zweier Elektricitätstheilchen für sich allein dem Princip von der Erhaltung der Energie genügen, vereinigen lässt.

Bonn, Juni 1876.

Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *H. Weber* in Königsberg.)

Die Verallgemeinerung der von *Jacobi* gegebenen Darstellungen der elliptischen Transcendenten zweiter und dritter Gattung als Functionen des Integrals erster Gattung führt in der Theorie der *Abel*schen Integrale zunächst zu folgendem Problem:

Es sei s eine beliebige algebraische Function von z vom Geschlechte p, $\Phi(s, z)$ irgend eine rationale Function von s und z, ferner seien $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_p$; $\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \dots \zeta_p^{(0)}$ Punkte in der die Verzweigungsart von s darstellenden *Riemann*schen Fläche T, d. h. Repräsentanten von je p zusammengehörigen Werthepaaren von s und z; es soll die Summe

$$\int_{\zeta_1^{(0)}}^{\zeta_1} \Phi(s, z)\, dz + \int_{\zeta_2^{(0)}}^{\zeta_2} \Phi(s, z)\, dz + \dots + \int_{\zeta_p^{(0)}}^{\zeta_p} \Phi(s, z)\, dz$$

dargestellt werden als Function der p unabhängigen Veränderlichen

$$(v_1, v_2, \dots v_p) \equiv \left(\sum_1^p \int_{\zeta_i^{(0)}}^{\zeta_i} du_1, \sum_1^p \int_{\zeta_i^{(0)}}^{\zeta_i} du_2, \dots \sum_1^p \int_{\zeta_i^{(0)}}^{\zeta_i} du_p\right),$$

wenn $u_1, u_2, \dots u_p$ von einander unabhängige Integrale erster Gattung sind.

Diese Aufgabe wird nun zunächst dadurch vereinfacht, dass man das Integral $\int \Phi(s, z)\, dz$ zerlegt in eine Summe einfacher Integrale zweiter und dritter Gattung und die verlangte Darstellung für jedes einzelne dieser Integrale aufsucht.

Nach einem von *Riemann* bewiesenen Satze (Theorie der *Abel*schen Functionen Art. 5) lässt sich jedes Integral zweiter Gattung linear ausdrücken durch p Integrale erster Gattung, durch p specielle, beliebig zu wählende Integrale zweiter Gattung und durch eine algebraische Function, und man kann hinzufügen, dass die Coefficienten in dieser Darstellung von den Unstetigkeitspunkten des darzustellenden Integrals und von den Moduln der Functionsclasse, der dasselbe angehört, nur algebraisch abhängen. Es bleibt also nur das Integral dritter Gattung, welches ausser von der oberen Grenze und den Moduln noch von einem variablen Parameter abhängt.

Bei der Darstellung dieser Integrale zeigt sich nun, so lange man nur einen Unstetigkeitspunkt berücksichtigt, die Schwierigkeit, dass der Unstetigkeitspunkt in den Argumenten der darstellenden Thetafunctionen als Grenze eines Integrals erster Gattung, also nicht wie bei den elliptischen Integralen dritter Gattung, ein Parameter vollkommen gleichberechtigt und vertauschbar mit den unabhängigen Variablen auftritt. Man kann diesem Uebelstand dadurch begegnen, dass man das Problem etwas verallgemeinert, indem man Integrale dritter Gattung mit nicht bloss einem, sondern mit p von einander unabhängigen Unstetigkeitspunkten zu Grunde legt, und als Parameter p Integralsummen erster Gattung einführt, welche von diesen Unstetigkeitspunkten ebenso abhängen, wie die Variablen $v_1, v_2, \ldots v_p$ von den oberen Grenzen.

Geht man von den Thetafunctionen aus, so stellt sich hiernach das Problem folgendermassen:

Es sei

$$\vartheta\left\{\begin{matrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right\}(u_1, u_2, \ldots u_p)$$
$$= \left(\sum_{-\infty}^{\infty} n\right)^p e^{\sum\limits_1^p \sum\limits_1^p a_{\iota\varkappa}\left(n_\iota + \frac{g_\iota}{2}\right)\left(n_\varkappa + \frac{g_\varkappa}{2}\right) + 2\sum\limits_1^p \left(n_\varkappa + \frac{g_\varkappa}{2}\right)\left(u_\varkappa + h_\varkappa \frac{\pi i}{2}\right)},$$

worin der Zahlencomplex $\left(\begin{matrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right)$ (Thetacharakteristik) irgend wie aus den Zahlen 0, 1 zusammengesetzt ist. Für $a_{\iota\varkappa}$ werden die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale erster Gattung gesetzt und für $u_1, u_2, \ldots u_p$, $v_1, v_2, \ldots v_p$ Summen von je p gleichartigen Normalintegralen erster Gattung mit veränderlichen oberen und passend bestimmten constanten unteren Grenzen. Es soll die Function

$$\log \frac{\vartheta\left\{\begin{matrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right\}(u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots u_p - v_p)}{\vartheta\left\{\begin{matrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right\}(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots u_p + v_p)}$$

dargestellt werden durch Integrale dritter Gattung und Logarithmen algebraischer Functionen mit denselben Variablen, die in den Integralsummen u, v die oberen Grenzen bilden.

In gleicher Weise sollen durch Integrale zweiter Gattung und algebraische Functionen die Functionen

$$\frac{\partial \log \vartheta\left\{\begin{matrix} g_1 g_2 \cdots g_p \\ h_1 h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right\}(u_1, u_2, \ldots u_p)}{\partial u_\iota}$$

dargestellt werden. Diese Darstellungen für den Fall $p=2$ durchzuführen ist der Zweck dieser Mittheilung.

Setzen wir für diesen Fall

$$r(x) = \sqrt{x(1-x)(1-k_1^2x)(1-k_2^2x)(1-k_3^2x)},$$

so können die Integrale aller zu derselben Klasse wie $r(x)$ gehörigen algebraischen Functionen mit Zuziehung rationaler Functionen von x und $r(x)$ und Logarithmen von solchen linear ausgedrückt werden durch folgende fünf:

$$w_1 = \int \frac{dx}{r(x)}, \quad w_2 = \int \frac{x\,dx}{r(x)}, \quad \text{(Integrale erster Gattung)},$$

$$e_1 = \int \frac{x^2dx}{r(x)}, \quad e_2 = \int \frac{x^3dx}{r(x)}, \quad \text{(Integrale zweiter Gattung)},$$

$$\varpi = \int \frac{r(\alpha)\,dx}{(x-\alpha)r(x)}, \quad \text{(Integral dritter Gattung)}.$$

In dem letzten Integral ist der Factor $r(\alpha)$ beigefügt, damit $\varpi \pm \log(x-\alpha)$ in den Punkten $x=\alpha$ stetig bleibe. Wenn k_1, k_2, k_3 reell sind, so soll $0 < k_1 < k_2 < k_3 < 1$ vorausgesetzt sein.

Die Transcendenten zweiter Gattung.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(1.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{r(x)} = iK_1, \int_0^1 \frac{dx}{r(x)} = K_2, \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\frac{1}{k_2^2}} \frac{dx}{r(x)} = K_3, \int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{dx}{r(x)} = iK_4, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{r(x)} = iL_1, \int_0^1 \frac{x\,dx}{r(x)} = L_2, \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\frac{1}{k_2^2}} \frac{x\,dx}{r(x)} = L_3, \int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{x\,dx}{r(x)} = iL_4, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2dx}{r(x)} = iE_1, \int_0^1 \frac{x^2dx}{r(x)} = E_2, \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\frac{1}{k_2^2}} \frac{x^2dx}{r(x)} = E_3, \int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{x^2dx}{r(x)} = iE_4, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3dx}{r(x)} = iG_1, \int_0^1 \frac{x^3dx}{r(x)} = G_2, \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\frac{1}{k_2^2}} \frac{x^3dx}{r(x)} = G_3, \int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{x^3dx}{r(x)} = iG_4 \text{*)}. \end{cases}$$

---

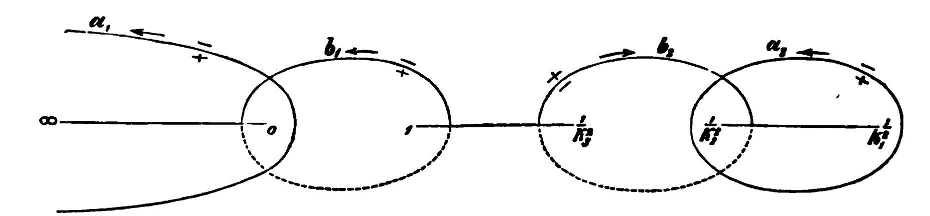
*) Unter $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2dx}{r(x)}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3dx}{r(x)}$, welche nach der gewöhnlichen Definition der bestimmten Integrale keine Bedeutung haben, sind hier die Hälften der Integrale

Sind k_1, k_2, k_3 reell, so sind es auch die Grössen K, L, E, G, und man kann über die Vorzeichen von $r(x)$ so verfügen, dass:

$$(2.)\quad \begin{cases} K_1 > 0, \quad L_1 < 0, \\ K_2 > L_2 > E_2 > G_2 > 0, \\ G_3 > E_3 > L_3 > K_3 > 0, \\ G_4 > E_4 > L_4 > K_4 > 0, \end{cases}$$

wobei $r(x)$ zwischen denselben Grenzen stets dasselbe Vorzeichen hat. (Für den allgemeinen Fall, dass k_1, k_2, k_3 complex sind, ergeben sich die Vorzeichen von $r(x)$ aus der unten getroffenen Bestimmung über die Periodicitätsmoduln).

Wir stellen nun die Verzweigungsart der Function $r(x)$ durch eine zweiblätterige *Riemann*sche Fläche T dar, welche wir durch ein Querschnittsystem, wie es in der beistehenden Figur angedeutet ist, in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandeln. (Die Verbindungslinie der beiden Querschnittpaare ist in der Figur nicht gezeichnet).



Die punktirten Linien hat man als im unteren Blatte verlaufend zu denken, und die Anordnung der Blätter soll dadurch festgesetzt sein, dass auf der reellen Strecke zwischen 0 und 1 $r(x)$ (oder dessen reeller Theil) im oberen Blatt positiv ist*).

$\int \frac{x^2dx}{r(x)}$, $\int \frac{x^3dx}{r(x)}$ zu verstehen, genommen von $x = 0$ bis $x = 0$ auf einem Wege, welcher den Punkt $x = \infty$, aber keinen anderen Verzweigungspunkt einschliesst. Man kann E_1, G_1 auch aus den Gleichungen bestimmen:

$$iE_1 + iE_4 = \int_1^{\frac{1}{k_3^2}} \frac{x^2dx}{r(x)}, \quad iG_1 + iG_4 = \int_1^{\frac{1}{k_3^2}} \frac{x^3dx}{r(x)}.$$

*) Die Zerschneidungsart ist so gewählt, dass die daraus gezogenen Folgerungen mit den Formeln von *Rosenhain* in Uebereinstimmung kommen. (Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes etc. Mémoires présentés de l'institut de France. Tome XI.).

Man erhält unter diesen Voraussetzungen für die Functionen w_1, w_2, e_1, e_2 an den vier Querschnitten a_1, b_1, a_2, b_2 folgende Periodicitätsmoduln:

Am Querschnitt.	Periodicitätsmodul von			
	w_1	w_2	e_1	e_2
a_1	$2K_2$	$2L_2$	$2E_2$	$2G_2$
b_1	$2iK_1$	$2iL_1$	$2iE_1$	$2iG_1$
a_2	$2K_3$	$2L_3$	$2E_3$	$2G_3$
b_2	$2iK_4$	$2iL_4$	$2iE_4$	$2iG_4$

Wir führen nun als Normalintegrale erster Gattung zwei solche lineare Combinationen u_1, u_2 von w_1, w_2 ein, dass die Periodicitätsmoduln derselben folgende Werthe erhalten:

Am Querschnitt.	Periodicitätsmodul von	
	u_1	u_2
a_1	πi	0
b_1	a_{11}	a_{12}
a_2	0	πi
b_2	a_{21}	a_{22}

Ist also

$$du_1 = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 x)\,dx}{r(x)}, \quad du_2 = \frac{(\alpha_2 + \beta_2 x)\,dx}{r(x)},$$

so ergeben sich hiernach zur Bestimmung der Constanten α_1, β_1, α_2, β_2 die Gleichungen

$$\alpha_1 K_2 + \beta_1 L_2 = \tfrac{1}{2}\pi i, \quad \alpha_2 K_2 + \beta_2 L_2 = 0,$$
$$\alpha_1 K_3 + \beta_1 L_3 = 0, \quad \alpha_2 K_3 + \beta_2 L_3 = \tfrac{1}{2}\pi i$$

und hieraus:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\pi i \frac{L_3}{K_2 L_3 - K_3 L_2}, \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\pi i \frac{-L_2}{K_2 L_3 - K_3 L_2},$$
$$\beta_1 = \tfrac{1}{2}\pi i \frac{-K_3}{K_2 L_3 - K_3 L_2}, \quad \beta_2 = \tfrac{1}{2}\pi i \frac{K_2}{K_2 L_3 - K_3 L_2},$$

ferner

$$a_{11} = \pi \frac{K_3 L_1 - K_1 L_3}{K_2 L_3 - K_3 L_2}, \quad a_{12} = \pi \frac{K_1 L_2 - K_2 L_1}{K_2 L_3 - K_3 L_2},$$
$$a_{21} = \pi \frac{K_3 L_4 - K_4 L_3}{K_2 L_3 - K_3 L_2}, \quad a_{22} = \pi \frac{K_4 L_2 - K_2 L_4}{K_2 L_3 - K_3 L_2}.$$

Da das Integral $\int w_1 dw_2$, über die ganze Begrenzung von T' erstreckt, den Werth 0 hat, so folgt die Relation

$$(3.)\quad K_2 L_1 - K_1 L_2 + K_3 L_4 - K_4 L_3 = 0,$$

d. h. $a_{12} = a_{21}$. Für reelle k_1, k_2, k_3 ergiebt sich leicht aus den Grössenbestimmungen (2.), dass a_{11}, a_{22} und

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = \pi^2 \frac{K_4 L_1 - K_1 L_4}{K_2 L_3 - K_3 L_2}$$

negativ sind, und dass also die mit den Moduln a_{11}, a_{22}, a_{12} gebildete Theta-Function convergirt, was bekanntlich auch aus den allgemeinen *Riemann*schen Principien folgt.

Die Grundlage für das Folgende bildet nun eine Reihe von Relationen zwischen den Grössen K, L, E, G, welche analog sind der bekannten *Legendre*schen Formel zwischen den vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung. Man kann diese Relationen sehr einfach auf demselben Wege herleiten, auf dem oben die Formel (3.) gefunden wurde, indem man die Integrale

$$\int e_1 dw_1,\quad \int e_1 dw_2,\quad \int e_2 dw_1,\quad \int e_2 dw_2,\quad \int e_2 de_1$$

über die Begrenzung der Fläche T' erstreckt, wodurch man einen Werth erhält, der identisch sein muss mit dem, welcher sich ergiebt, wenn man die gleichen Integrale über einen kleinen Kreis erstreckt, welcher den Unstetigkeitspunkt ($x = \infty$) umgiebt. Um diese Relationen bequem darstellen zu können, setzen wir

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1-x)(1-k_1^2 x)(1-k_2^2 x)(1-k_3^2 x) \\ &= x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + \gamma_5 x^5, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} -\gamma_2 &= 1 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \\ \gamma_3 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_2^2 k_3^2 + k_3^2 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 \\ -\gamma_4 &= k_2^2 k_3^2 + k_3^2 k_1^2 + k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_2^2 k_3^2 \\ \gamma_5 &= k_1^2 k_2^2 k_3^2. \end{aligned}$$

Man findet dann

$$(4.)\quad \begin{cases} E_2 K_1 - E_1 K_2 + E_3 K_4 - E_4 K_3 = 0, \\ E_2 L_1 - E_1 L_2 + E_3 L_4 - E_4 L_3 = -\dfrac{2\pi}{\gamma_5}, \\ G_2 K_1 - G_1 K_2 + G_3 K_4 - G_4 K_3 = -\dfrac{2\pi}{3\gamma_5}, \\ G_2 L_1 - G_1 L_2 + G_3 L_4 - G_4 L_3 = \dfrac{4\pi}{3} \dfrac{\gamma_4}{\gamma_5^2}, \\ G_2 E_1 - G_1 E_2 + G_3 E_4 - G_4 E_3 = -\dfrac{2\pi}{3} \dfrac{\gamma_3}{\gamma_5^2}, \end{cases}$$

Formeln, denen man auch die etwas bequemere Gestalt geben kann:

$$(5.)\quad \begin{cases} \pi E_1 + E_2 a_{11} + E_3 a_{12} = -\dfrac{2\pi^2}{\gamma_5}\dfrac{K_3}{K_2L_3-K_3L_2}, \\ \pi E_4 + E_2 a_{21} + E_3 a_{22} = \dfrac{2\pi^2}{\gamma_5}\dfrac{K_2}{K_2L_3-K_3L_2}, \\ \pi G_1 + G_2 a_{11} + G_3 a_{12} = \dfrac{2\pi^2}{3\gamma_5^2}\dfrac{\gamma_5 L_3 + 2\gamma_4 K_3}{K_2L_3-K_3L_2}, \\ \pi G_4 + G_2 a_{21} + G_3 a_{22} = -\dfrac{2\pi^2}{3\gamma_5^2}\dfrac{\gamma_5 L_2 + 2\gamma_4 K_2}{K_2L_3-K_3L_2}, \\ \gamma_3(K_2L_3-K_3L_2) = 3\gamma_5(K_3G_2-K_2G_3) + \gamma_5(L_3E_2-L_2E_3) \\ \qquad\qquad + 2\gamma_4(K_3E_2-K_2E_3). \end{cases}$$

Es sollen nun als Normalintegrale der zweiten Gattung zwei solche eingeführt werden, deren Periodicitätsmoduln an drei Querschnitten verschwinden.

Setzt man

$$\zeta = \int \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{r(x)}\,dx,$$

so lassen sich die Verhältnisse der Constanten c_0, c_1, c_2, c_3 einmal so bestimmen, dass die Periodicitätsmoduln für die Querschnitte a_1, a_2, b_2, das andere Mal so, dass sie für die Querschnitte a_1, b_1, a_2 verschwinden. Man erhält so mit Anwendung der Relationen (4.) oder (5.) die beiden Functionen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = G_2\displaystyle\int\frac{3\gamma_5 dx}{r(x)} + E_2\int\frac{2\gamma_4+\gamma_5 x}{r(x)}dx + L_2\int\frac{\gamma_3-\gamma_5 x^2}{r(x)}dx - K_2\int\frac{\gamma_3 x + 2\gamma_4 x^2 + 3\gamma_5 x^3}{r(x)}dx, \\ \zeta_2 = G_3\displaystyle\int\frac{3\gamma_5 dx}{r(x)} + E_3\int\frac{2\gamma_4+\gamma_5 x}{r(x)}dx + L_3\int\frac{\gamma_3-\gamma_5 x^2}{r(x)}dx - K_3\int\frac{\gamma_3 x + 2\gamma_4 x^2 + 3\gamma_5 x^3}{r(x)}dx, \end{cases}$$

und mittelst derselben Relationen ergiebt sich für den Periodicitätsmodul von ζ_1 am Querschnitt b_1 ebenso wie für den von ζ_2 am Querschnitt b_2 der Werth $-4\pi i$.

Wir führen nun die beiden unabhängigen Variablen v_1, v_2 ein mittelst der Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} v_1 = \displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} du_1 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2, r(x_2)} du_1, \\ v_2 = \displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} du_2 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2, r(x_2)} du_2 \end{cases}$$

und betrachten als Functionen von diesen die beiden Summen

$$(8.)\quad \begin{cases} Z_1(v_1, v_2) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} d\zeta_1 + \dfrac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{k_2^2}}^{x_2, r(x_2)} d\zeta_1, \\ Z_2(v_1, v_2) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} d\zeta_2 + \dfrac{1}{2i\pi}\int_{\frac{1}{k_2^2}}^{x_2, r(x_2)} d\zeta_2. \end{cases}$$

Durch (7.) sind die symmetrischen rationalen Functionen von x_1, $r(x_1)$; x_2, $r(x_2)$ als eindeutige Functionen von v_1, v_2 definirt, und wenn in (7.) und (8.) die Integrationswege übereinstimmend angenommen werden, so sind auch Z_1, Z_2 eindeutige Functionen von v_1, v_2. Diese Functionen Z_1, Z_2 haben in Folge der Eigenthümlichkeit der Functionen ζ_1, ζ_2 für jede der beiden Variablen die Periode πi und genügen ausserdem den Relationen

$$(9.)\quad \begin{cases} Z_1(v_1+a_{11},\ v_2+a_{12}) - Z_1(v_1,\ v_2) = -2, \\ Z_1(v_1+a_{21},\ v_2+a_{22}) - Z_1(v_1,\ v_2) = 0, \\ Z_2(v_1+a_{11},\ v_2+a_{12}) - Z_2(v_1,\ v_2) = 0, \\ Z_2(v_1+a_{21},\ v_2+a_{22}) - Z_2(v_1,\ v_2) = -2. \end{cases}$$

Diese Eigenschaften haben auch die Functionen

$$\frac{\partial \log \vartheta \begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{Bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial v_1}, \qquad \frac{\partial \log \vartheta \begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{Bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial v_2},$$

wenn $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$ eine beliebige Charakteristik ist, woraus folgt, dass die beiden Functionen

$$(10.)\quad \begin{cases} Z_1(v_1, v_2) - \dfrac{\partial \log \vartheta \begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{Bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial v_1}, \\ Z_2(v_1, v_2) - \dfrac{\partial \log \vartheta \begin{Bmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{Bmatrix} (v_1, v_2)}{\partial v_2} \end{cases}$$

algebraische Functionen, und zwar symmetrische rationale Functionen von x_1, $r(x_1)$; x_2, $r(x_2)$ sind. Die Darstellung dieser algebraischen Functionen wird am einfachsten (bei unserer Voraussetzung über die unteren Grenzen und über die Querschnitte der Fläche T), wenn man die Function $\vartheta \begin{Bmatrix} 00 \\ 11 \end{Bmatrix} (v_1, v_2)$ zu Grunde legt. Es lassen sich diese algebraischen Functionen leicht durch Untersuchung ihrer Unstetigkeiten bilden.

Betrachtet man zu dem Ende nach (7.) $\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1, v_2)$ als Function von x_1, so ergiebt sich leicht, dass dieselbe unendlich klein in der ersten Ordnung wird für $x_1 = \infty$ und für x_1, $r(x_1) = x_2$, $-r(x_2)$. Die Functionen Z_1, Z_2, als Functionen von x_1 betrachtet, werden unendlich für $x_1 = \infty$, und zwar so, dass

$$Z_1 + \frac{K_2\sqrt{\gamma_5}}{\pi i}\, x_1^{\frac{3}{2}} + C_1 x_1^{\frac{1}{2}}, \quad Z_2 + \frac{K_3\sqrt{\gamma_5}}{\pi i}\, x_1^{\frac{3}{2}} + C_2 x_1^{\frac{1}{2}}$$

für $x_1 = \infty$ endlich bleiben, wenn C_1, C_2 Constanten sind, die sich leicht ausdrücken lassen, deren Kenntniss aber für unseren Zweck nicht erforderlich ist. Hiernach sind die algebraischen Functionen (10.) vollkommen bestimmt, wenn noch beachtet wird, dass dieselben in Bezug auf x_1, x_2 symmetrisch sind, und dass sie verschwinden für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, d. h. für $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{k_3^2}$. Es ergiebt sich:

$$(11.)\quad \begin{cases} Z_1(v_1, v_2) = \dfrac{\partial \log \vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1, v_2)}{\partial v_1} - \dfrac{K_2}{\pi i}\,\dfrac{r(x_1) - r(x_2)}{x_1 - x_2}, \\[2ex] Z_2(v_1, v_2) = \dfrac{\partial \log \vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1, v_2)}{\partial v_2} - \dfrac{K_3}{\pi i}\,\dfrac{r(x_1) - r(x_2)}{x_1 - x_2}. \end{cases}$$

Die Function $\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1, v_2)$ lässt sich, wie schon erwähnt, durch jede der fünfzehn übrigen Theta-Functionen ersetzen. Es ändert sich dabei nur die algebraische Function, und man kann ihren Ausdruck erhalten, wenn man die Formeln des Herrn *Rosenhain* für die Quotienten zweier Theta-Functionen anwendet. Durch Elimination der algebraischen Function ergiebt sich aus (11.) noch

$$(12.)\quad K_3 Z_1(v_1, v_2) - K_2 Z_1(v_1, v_2) = K_3 \frac{\partial \log \vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1, v_2)}{\partial v_1} - K_2 \frac{\partial \log \vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1, v_2)}{\partial v_2},$$

eine Formel, welche in ähnlicher Gestalt von Herrn *Weierstrass* gegeben ist in der Abhandlung über die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 31. October 1861).

Die Transcendenten dritter Gattung.

Um eine zweckmässige Normalform für die Integrale dritter Gattung zu erhalten, fügen wir zu der oben aufgestellten einfachsten Form ein

Integral erster Gattung hinzu, indem wir setzen:

$$\varpi(x, y) = \int \frac{dx\, r(y)}{(x-y)r(x)} + \Phi(y)\int \frac{dx}{r(x)} + \Psi(y)\int \frac{x dx}{r(x)}$$

und stellen die Forderung, dass die Functionen $\Phi(y)$, $\Psi(y)$ so bestimmt werden sollen, dass

$$\varpi(x, y) = \varpi(y, x)$$

werde. Es ist aus einem allgemeinen Satze bekannt, dass diese Forderung erfüllt werden kann.

Für $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y}$ ergiebt sich zunächst

$$\frac{f(y)+\frac{1}{2}(x-y)f'(y)}{(x-y)^2 r(x) r(y)} + \frac{1}{r(x)}\Phi'(y) + \frac{x}{r(x)}\Psi'(y),$$

und wenn wir

$$\Phi'(y) = \frac{\varphi(y)}{r(y)}, \quad \Psi'(y) = \frac{\psi(y)}{r(y)}$$

setzen,

$$\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} = \frac{F(x, y)}{(x-y)^2 r(x) r(y)},$$

worin

$$F(x, y) = f(y) + \tfrac{1}{2}(x-y)f'(y) + (x-y)^2\{\varphi(y) + x\psi(y)\}.$$

Diese Function soll nun in Bezug auf x, y symmetrisch sein. Daher müssen φ, ψ ganze Functionen, die erste vom dritten, die andere vom zweiten Grade sein, und $\Phi(y)$, $\Psi(y)$ werden Integrale zweiter Gattung. Setzen wir

$$\varphi(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3,$$
$$\psi(y) = c_0' + c_1' y + c_2' y^2,$$

so ergiebt sich, indem man in $F(x, y)$ die Coefficienten von y^5, y^4, xy^4 gleich Null und den Coefficienten von x^3 gleich dem von y^3 setzt:

$$c_3 = \tfrac{3}{2}\gamma_5, \quad c_2 = \gamma_4, \quad c_2' = \tfrac{1}{2}\gamma_5, \quad c_0' = c_1 - \tfrac{1}{2}\gamma_3,$$

während c_0, c_1, c_1' unbestimmt bleiben. Hiernach lässt sich die Function $F(x, y)$ auf die Form bringen

$$\begin{aligned} F(x, y) = {} & \tfrac{1}{2}x(1-x)(1-k_1^2 y)(1-k_2^2 y)(1-k_3^2 y) \\ & + \tfrac{1}{2}y(1-y)(1-k_1^2 x)(1-k_2^2 x)(1-k_3^2 x) \\ & + (x-y)^2\{c_0 + \tfrac{1}{2} + (c_1 - \tfrac{1}{2}\gamma_3)(x+y) + (c_1' + \tfrac{1}{2}\gamma_5)xy\} \end{aligned}$$

und für φ und ψ ergiebt sich

$$(13.)\quad \begin{cases} \varphi(y) = c_0 + c_1 y + \gamma_4 y^2 + \frac{3}{2}\gamma_5 y^3, \\ \psi(y) = (c_1 - \frac{1}{2}\gamma_3) + c_1' y + \frac{1}{2}\gamma_5 y^2. \end{cases}$$

Wir haben demnach für $\varpi(x, y)$ die beiden Ausdrücke:

$$(14.)\quad \begin{cases} \varpi(x, y) = \int^x \frac{r(y)\,dx}{(x-y)r(x)} + \int^y \frac{\varphi(y)\,dy}{r(y)} \int^x \frac{dx}{r(x)} + \int^y \frac{\psi(y)\,dy}{r(y)} \int^x \frac{x\,dx}{r(x)} \\ \qquad = \int^y \frac{r(x)\,dy}{(y-x)r(y)} + \int^x \frac{\varphi(x)\,dx}{r(x)} \int^y \frac{dy}{r(y)} + \int^x \frac{\psi(x)\,dx}{r(x)} \int^y \frac{y\,dy}{r(y)}, \end{cases}$$

und diese beiden Ausdrücke werden in der That dann mit einander übereinstimmen, wenn als untere Grenzen der Integrale, zu x und y gehörig, zwei solche Werthe genommen werden, für welche $r(x)$ bezw. $r(y)$ verschwindet.

Wir erhalten nun für die Periodicitätsmoduln von ϖ, als Function von x aufgefasst:

am Querschnitt a_1: $\quad 2\int^y \frac{dy}{r(y)} \int_0^1 \frac{\varphi(x)\,dx}{r(x)} + 2\int^y \frac{y\,dy}{r(y)} \int_0^1 \frac{\psi(x)\,dx}{r(x)},$

- - - b_1: $\quad 2\int^y \frac{dy}{r(y)} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)\,dx}{r(x)} + 2\int^y \frac{y\,dy}{r(y)} \int_{-\infty}^0 \frac{\psi(x)\,dx}{r(x)},$

- - - a_2: $\quad 2\int^y \frac{dy}{r(y)} \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\frac{1}{k_2^2}} \frac{\varphi(x)\,dx}{r(x)} + 2\int^y \frac{y\,dy}{r(y)} \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\frac{1}{k_2^2}} \frac{\psi(x)\,dx}{r(x)},$

- - - b_2: $\quad 2\int^y \frac{dy}{r(y)} \int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{\varphi(x)\,dx}{r(x)} + 2\int^y \frac{y\,dy}{r(y)} \int_{\frac{1}{k_2^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{\psi(x)\,dx}{r(x)}.$

Es soll nun über die in ϖ noch unbestimmten Constanten so verfügt werden, dass die Periodicitätsmoduln dieser Function an den Querschnitten a_1, a_2 verschwinden. Dafür ergeben sich zunächst vier Bedingungen:

$$(15.)\quad \begin{cases} c_0 K_2 + c_1 L_2 + \gamma_4 E_2 + \frac{3}{2}\gamma_5 G_2 = 0, \\ c_0 K_3 + c_1 L_3 + \gamma_4 E_3 + \frac{3}{2}\gamma_5 G_3 = 0, \\ (c_1 - \frac{1}{2}\gamma_3) K_2 + c_1' L_2 + \frac{1}{2}\gamma_5 E_2 = 0, \\ (c_1 - \frac{1}{2}\gamma_3) K_3 + c_1' L_3 + \frac{1}{2}\gamma_5 E_3 = 0, \end{cases}$$

aber es lässt sich leicht aus den Relationen (4.) oder (5.) nachweisen, dass von diesen Gleichungen eine aus den übrigen folgt.

Man findet nämlich

$$(16.)\quad \begin{cases} c_1 - \frac{1}{2}\gamma_3 = \frac{1}{2}\gamma_5 \dfrac{E_3L_2 - E_2L_3}{K_2L_3 - K_3L_2}, \\ c_1' = -\frac{1}{2}\gamma_5 \dfrac{E_3K_2 - E_2K_3}{K_2L_3 - K_3L_2}, \\ c_0 = \gamma_4 \dfrac{E_3L_2 - E_2L_3}{K_2L_3 - K_3L_2} + \frac{3}{2}\gamma_5 \dfrac{G_3L_2 - G_2L_3}{K_2L_3 - K_3L_2}, \\ c_1 = -\gamma_4 \dfrac{E_3K_2 - E_2K_3}{K_2L_3 - K_3L_2} - \frac{3}{2}\gamma_5 \dfrac{G_3K_2 - G_2K_3}{K_2L_3 - K_3L_2} \\ \quad = \frac{1}{2}\gamma_3 + \frac{1}{2}\gamma_5 \dfrac{E_3L_2 - E_2L_3}{K_2L_3 - K_3L_2}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe der Constanten c_0, c_1, c_1' in die Functionen φ, ψ ein, so ergeben sich für die Periodicitätsmoduln von ϖ an den Querschnitten b_1, b_2, wieder mit Anwendung der Relationen (5.) resp. die Ausdrücke

$$(17.)\quad \begin{cases} 2i\pi \displaystyle\int^y \frac{dy}{r(y)} \frac{L_3 - yK_3}{K_2L_3 - K_3L_2}, \\ -2i\pi \displaystyle\int^y \frac{dy}{r(y)} \frac{L_2 - yK_2}{K_2L_3 - K_3L_2}. \end{cases}$$

Nachdem so die Function $\varpi(x, y)$ völlig bestimmt ist, führen wir zwei Paare von unabhängigen Variablen $v_1, v_2; w_1, w_2$ ein vermittelst der Gleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} v_1 = \displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} du_1 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2, r(x_2)} du_1, \\ v_2 = \displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} du_2 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2, r(x_2)} du_2, \\ w_1 = \displaystyle\int_0^{y_1, r(y_1)} du_1 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{y_2, r(y_2)} du_1, \\ w_2 = \displaystyle\int_0^{y_1, r(y_1)} du_2 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{y_2, r(y_2)} du_2 \end{cases}$$

und betrachten als Function von diesen die Summe

$$(19.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2; w_1, w_2) \\ = \displaystyle\int_0^{x_1, r(x_1)} \int_0^{y_1, r(y_1)} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} dx\, dy + \int_0^{x_1, r(x_1)} \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{y_2, r(y_2)} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} dx dy \\ + \displaystyle\int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2, r(x_2)} \int_0^{y_1, r(y_1)} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} dx\, dy + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2, r(x_2)} \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{y_2, r(y_2)} \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x \partial y} dx dy. \end{cases}$$

Diese Function hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn v_1, v_2 mit w_1, w_2 vertauscht werden, und aus den Ausdrücken (17.) für die Periodicitätsmoduln von ϖ ergiebt sich ferner, wenn h_1, h_2, l_1, l_2 ganze Zahlen sind:

$$(20.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+h_1\pi i,\ v_2+h_2\pi i;\ w_1+l_1\pi i,\ w_2+l_2\pi i) = \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1,\ w_2), \\ \Pi(v_1+a_{11},\ v_2+a_{12};\ w_1,\ w_2) = \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1,\ w_2)+4w_1, \\ \Pi(v_1+a_{21},\ v_2+a_{22};\ w_1,\ w_2) = \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1,\ w_2)+4w_2, \\ \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1+a_{11},\ w_2+a_{12}) = \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1,\ w_2)+4v_1, \\ \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1+a_{21},\ w_2+a_{22}) = \Pi(v_1,\ v_2;\ w_1,\ w_2)+4v_2, \end{cases}$$

(abgesehen von ganzen Vielfachen von $2\pi i$, welche durch das logarithmische Verhalten der Function ϖ eingeführt werden können.)

Dieselben Eigenschaften bezüglich der Periodicität besitzt auch die Function

$$\log\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1-w_1,\ v_2-w_2)}{\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1+w_1,\ v_2+w_2)},$$

woraus zu schliessen, dass

$$\Pi(v_1,\ v_2;\ w_1,\ w_2)-\log\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1-w_1,\ v_2-w_2)}{\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1+w_1,\ v_1+w_2)}$$

gleich ist dem Logarithmus einer algebraischen Function von x_1, x_2, y_1, y_2, und zwar einer rationalen Function von $x_1, r(x_1), x_2, r(x_2), y_1, r(y_1), y_2, r(y_2)$, welche ungeändert bleibt, wenn man x_1 mit x_2, y_1 mit y_2 oder x_1, x_2 mit y_1, y_2 vertauscht. Diese Function lässt sich aus ihren Unstetigkeiten leicht herstellen. Da nämlich

$$\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}\Big(\int_0^{x_1}du_1,\ \int_0^{x_1}du_2\Big)$$

als Function von x_1 verschwindet in den Punkten $x_1=\infty$ und $x_1=\frac{1}{k_3^2}$, so verschwindet

$$\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}\Big(\int_0^{x_1}du_1-\int_\infty^{\zeta_1}du_1-\int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\zeta_2}du_1,\ \int_0^{x_1}du_2-\int_\infty^{\zeta_1}du_2-\int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\zeta_2}du_2\Big)$$

in den Punkten $x_1=\zeta_1, x_2=\zeta_2$. Um also die Punkte zu finden, in denen $\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1+w_1, v_2+w_2)$, als Function von x_1 betrachtet, Null wird, hat man

die Congruenz zu lösen

$$\int_{\infty}^{\zeta_1} du_1 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\zeta_2} du_1 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2} du_1 + \int_{0}^{y_1} du_1 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{y_2} du_1 \equiv 0,$$

$$\int_{\infty}^{\zeta_1} du_2 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{\zeta_2} du_2 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{x_2} du_2 + \int_{0}^{y_1} du_2 + \int_{\frac{1}{k_3^2}}^{y_2} du_2 \equiv 0,$$

und nach dem *Abel*schen Theorem ergeben sich die Punkte ζ_1, ζ_2 als Nullpunkte der Function

$$\varDelta(x_1, r(x_1); x_2, r(x_2); y_1, r(y_1); y_2, r(y_2))$$
$$= \begin{vmatrix} (1-k_3^2 x_1)x_1, & (1-k_3^2 x_1)x_1^2, & r(x_1), & x_1 r(x_1) \\ (1-k_3^2 x_2)x_2, & (1-k_3^2 x_2)x_2^2, & r(x_2), & x_2 r(x_2) \\ (1-k_3^2 y_1)y_1, & (1-k_3^2 y_1)y_1^2, & r(y_1), & y_1 r(y_1) \\ (1-k_3^2 y_2)y_2, & (1-k_3^2 y_2)y_2^2, & r(y_2), & y_2 r(y_2) \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhält man die Nullpunkte von $\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1-w_1, v_2-w_2)$ einfach dadurch, dass man $r(y_1)$, $r(y_2)$ durch $-r(y_1)$, $-r(y_2)$ ersetzt. Demnach ergiebt sich für die Function Π der Ausdruck

$$(21.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2; w_1, w_2) \\ = \log \dfrac{\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1-w_1, v_2-w_2)}{\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}(v_1+w_1, v_2+w_2)} + \log \dfrac{\varDelta(x_1, r(x_1); x_2, r(x_2); y_1, r(y_1); y_2, r(y_2))}{\varDelta(x_1, r(x_1); x_2, r(x_2); y_1, -r(y_1); y_2, -r(y_2))}. \end{cases}$$

Auch hierin kann die Function $\vartheta\begin{Bmatrix}00\\11\end{Bmatrix}$ durch jede der 15 übrigen Theta-Functionen ersetzt werden.

Königsberg im Mai 1876.

Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus gewissen Flächen vierter Ordnung.

(Von Herrn *A. Wangerin.*)

In seinen Vorlesungen über Dynamik sagt *Jacobi* bei Einführung der elliptischen Coordinaten (pag 198): „Die Hauptschwierigkeit bei der Integration gegebener Differentialgleichungen scheint in der Einführung der richtigen Variablen zu bestehen, zu deren Auffindung es keine allgemeine Regel giebt. Man muss daher das umgekehrte Verfahren einschlagen und nach erlangter Kenntniss einer merkwürdigen Substitution die Probleme aufsuchen, bei welchen dieselbe mit Glück zu brauchen ist.“ Im Folgenden soll nun eine neue derartige Substitution mitgetheilt und dieselbe ausser auf einige Fragen der Geometrie auf die Differentialgleichung des Potentials angewandt werden, die sich nach Einführung jener Substitution auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reducirt.

1.

Zerlegt man die Gleichung

$$x+iy = \cos\mathrm{am}(t+iu)$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei Gleichungen von der Form $F(x,y,t)=0$, $\Phi(x,y,u)=0$, so erhält man zwei Systeme sich rechtwinklig schneidender Curven, deren jede die Form hat

$$(1.)\qquad (x^2+y^2)^2+Ax^2+By^2-D^2 = 0.$$

A und B sind dabei Functionen der variablen Parameter t, u, also von Curve zu Curve veränderlich, während D für die Curven beider Systeme constant ist. Für alle Curven hat ferner der Ausdruck

$$(2.)\qquad \frac{4D^2+A.B}{A-B}$$

einen constanten Werth. Aehnliche Curven erhält man, wenn man die elliptischen Functionen sinusamplitudo oder Δamplitudo an Stelle von cosinusamplitudo setzt. Diese Curven sind zuerst von Herrn *Siebeck* untersucht (dieses Journ. Bd. 57). Einige weitere geometrische Eigenschaften derselben habe ich gefunden bei Gelegenheit der Reduction der Potentialgleichung für gewisse

Rotationskörper [Preisschriften der Fürstlich-*Jablonowski*schen Gesellschaft zu Leipzig, No. 18. 1875].

Die Analogie der eben definirten krummlinigen Coordinaten t, u mit den elliptischen Coordinaten in der Ebene legt die Frage nahe, ob es nicht auch, den confocalen Ellipsoiden und Hyperboloiden entsprechend, ein dreifach orthogonales Flächensystem giebt, dessen Flächen durch eine analog der Gleichung (1.) gebildete Gleichung bestimmt werden, während die Constanten der Gleichung durch Relationen analog (2.) verbunden sind. Ein solches Flächensystem existirt in der That, wie die folgende Untersuchung zeigen wird.

Dem Satze, dass confocale Ellipsoide und Hyperboloide sich senkrecht durchschneiden, entspricht der folgende Satz:

Satz: Die drei Flächen

$$(3.)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)^2+Ax^2+By^2+Cz^2 = D^2, \\ (x^2+y^2+z^2)^2+A_1x^2+B_1y^2+C_1z^2 = D^2, \\ (x^2+y^2+z^2)^2+A_{11}x^2+B_{11}y^2+C_{11}z^2 = D^2 \end{cases}$$

schneiden sich rechtwinklig, wenn die in ihnen enthaltenen Constanten folgenden Bedingungen genügen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{4D^2+AB}{A-B} = \dfrac{4D^2+A_1B_1}{A_1-B_1} = \dfrac{4D^2+A_{11}B_{11}}{A_{11}-B_{11}}, \\ \dfrac{4D^2+AC}{A-C} = \dfrac{4D^2+A_1C_1}{A_1-C_1} = \dfrac{4D^2+A_{11}C_{11}}{A_{11}-C_{11}}. \end{cases}$$

Damit jedoch jene drei Flächen sich wirklich schneiden, ist die weitere Bedingung nöthig:

$$(5.)\quad A > -\frac{4D^2+AC}{A-C} > A_1 > -\frac{4D^2+AB}{A-B} > A_{11}.$$

Beweis. Als Bedingung dafür, dass die drei Flächen sich senkrecht schneiden, erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn man zur Abkürzung

$$x^2+y^2+z^2 = \varrho^2$$

setzt:

$$(6.)\quad \begin{cases} A\,A_1\,x^2+B\,B_1\,y^2+C\,C_1\,z^2+4D^2\varrho^2 = 0, \\ A\,A_{11}x^2+B\,B_{11}y^2+C\,C_{11}z^2+4D^2\varrho^2 = 0, \\ A_1A_{11}x^2+B_1B_{11}y^2+C_1C_{11}z^2+4D^2\varrho^2 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den sechs Gleichungen (3.) und (6.) x^2, y^2, z^2, so erhält

man drei Bedingungsgleichungen für A, B etc. Die Gleichungen (6.) zeigen nun, dass es bei jener Elimination nur auf die Verhältnisse $\frac{x^2}{\varrho^2}$, $\frac{y^2}{\varrho^2}$, $\frac{z^2}{\varrho^2}$ ankommt. Diese erhält man leicht, wenn man je zwei der Gleichungen (3.) subtrahirt und dazu die Gleichung $x^2+y^2+z^2=\varrho^2$ nimmt.

Setzt man

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} B-B_1, & C-C_1 \\ B-B_{11}, & C-C_{11} \end{vmatrix}, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} C-C_1, & A-A_1 \\ C-C_{11}, & A-A_{11} \end{vmatrix}, \quad \varDelta_3 = \begin{vmatrix} A-A_1, & B-B_1 \\ A-A_{11}, & B-B_{11} \end{vmatrix},$$

$$\varDelta = \varDelta_1+\varDelta_2+\varDelta_3,$$

so wird

$$\frac{x^2}{\varrho^2} = \frac{\varDelta_1}{\varDelta}, \quad \frac{y^2}{\varrho^2} = \frac{\varDelta_2}{\varDelta}, \quad \frac{z^2}{\varrho^2} = \frac{\varDelta_3}{\varDelta}.$$

Die Gleichungen (6.) werden somit:

$$(6^a.)\quad \begin{cases} A\,A_1\,\varDelta_1+B\,B_1\,\varDelta_2+C\,C_1\,\varDelta_3+4D^2\varDelta = 0, \\ A\,A_{11}\varDelta_1+B\,B_{11}\,\varDelta_2+C\,C_{11}\varDelta_3+4D^2\varDelta = 0, \\ A_1A_{11}\varDelta_1+B_1B_{11}\,\varDelta_2+C_1C_{11}\varDelta_3+4D^2\varDelta = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden nun durch die Annahmen (4.) erfüllt. Denn setzt man

$$(7.)\quad \frac{4D^2+AB}{A-B} = mD, \quad \frac{4D^2+AC}{A-C} = nD,$$

drückt mit Hülfe derselben B und C durch A aus, ebenso (nach (4.)) B_1 und C_1 durch A_1, B_{11} und C_{11} durch A_{11}, so wird

$$\varDelta_1 = \frac{D^2(m^2+4)(n^2+4)(A-A_1)(A-A_{11})(A_1-A_{11})(m-n)}{(A+mD)(A_1+mD)(A_{11}+mD)(A+nD)(A_1+nD)(A_{11}+nD)},$$

$$\varDelta_2 = \frac{D^2(n^2+4)(A-A_1)(A-A_{11})(A_{11}-A_1)}{(A+nD)(A_1+nD)(A_{11}+nD)},$$

$$\varDelta_3 = \frac{D^2(m^2+4)(A-A_1)(A-A_{11})(A_1-A_{11})}{(A+mD)(A_1+mD)(A_{11}+mD)}.$$

Daher geht die erste der Gleichungen (6^a.) nach Unterdrückung der gemeinsamen Factoren in folgende über:

$$\begin{aligned} AA_1(m-n)(m^2+4)(n^2+4)D-(n^2+4)(A_{11}+mD)(mA-4D)(mA_1-4D) \\ +(m^2+4)(A_{11}+nD)(nA-4D)(nA_1-4D) \\ +4\{D^3(m^2+4)(n^2+4)(m-n)-(n^2+4)(A+mD)(A_1+mD)(A_{11}+mD) \\ +(m^2+4)(A+nD)(A_1+nD)(A_{11}+nD)\} = 0, \end{aligned}$$

und dies ist, wie man sich leicht überzeugt, eine identische Gleichung. Ebenso werden die beiden andern Gleichungen (6^a.) durch die Bedingungen (4.) identisch erfüllt.

Damit ferner die drei Flächen (3.) sich überhaupt schneiden, müssen die Werthe von $\frac{x^2}{\varrho^2}, \frac{y^2}{\varrho^2}, \frac{z^2}{\varrho^2}$ positiv sein. Dies findet, wenn $m > n$ und $A > A_1 > A_{11}$ vorausgesetzt wird, statt, wenn die Bedingung (5.) erfüllt ist. Dann sind, wie man leicht erkennt, die nicht gemeinsamen Factoren von Δ_1, Δ_2, Δ_3 und Δ positiv, daher $\frac{x^2}{\varrho^2}, \frac{y^2}{\varrho^2}, \frac{z^2}{\varrho^2}$ positiv; und damit ist der obige Satz vollständig bewiesen.

Zusatz. Aus den Gleichungen (4.) folgt noch:

$$(4^a.)\qquad \frac{4D^2+BC}{B-C} = \frac{4D^2+B_1C_1}{B_1-C_1} = \frac{4D^2+B_{11}C_{11}}{B_{11}-C_{11}} = \frac{mn+4}{m-n}\cdot D.$$

Es wird daher jede der Flächen (3.) durch jede der Coordinatenebenen in einer Curve geschnitten, die unter den Curven (1.) enthalten ist. Jede andere durch den Mittelpunkt gelegte Ebene schneidet die Flächen in eben solchen Curven, eine nicht durch den Mittelpunkt gehende Ebene aber nicht. Bestimmte von den Mittelpunktsschnitten werden Lemniscaten im weiteren Sinne (*Cassini*sche Curven).

2.

Lässt man in den Gleichungen (3.) die drei Constanten A, A_1, A_{11} innerhalb der durch die Bedingungen (5.) angegebenen Grenzen variiren, so stellen jene Gleichungen drei orthogonale Flächenschaaren dar. Durch die variablen Parameter A, A_1, A_{11} dieser Flächenschaaren, oder vielmehr durch andere von diesen abhängige Grössen sollen nun zunächst die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes ausgedrückt werden. Statt der Parameter A, A_1, A_{11} drei andre Parameter zu wählen ist zweckmässig, um symmetrische Ausdrücke zu erhalten; nur sind die neuen Parameter so zu wählen, dass die Bedingungen (4.) erhalten bleiben. Ich setze daher:

$$(8.)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{a\lambda-4D^2}{\lambda+a}, & B = \dfrac{b\lambda-4D^2}{\lambda+b}, \quad C = \dfrac{c\lambda-4D^2}{\lambda+c}, \\ A_1 = \dfrac{a\lambda_1-4D^2}{\lambda_1+a}, & B_1 = \dfrac{b\lambda_1-4D^2}{\lambda_1+b}, \quad C_1 = \dfrac{c\lambda_1-4D^2}{\lambda_1+c}, \\ A_{11} = \dfrac{a\lambda_{11}-4D^2}{\lambda_{11}+a}, & B_{11} = \dfrac{b\lambda_{11}-4D^2}{\lambda_{11}+b}, \quad C_{11} = \dfrac{c\lambda_{11}-4D^2}{\lambda_{11}+c}, \end{cases}$$

wo a, b, c Constante, λ, λ_1, λ_{11} die variablen Parameter sind. Dann wird

$$(9.)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = F.(4D^2+b^2)(4D^2+c^2)(b-c)(\lambda+a)(\lambda_1+a)(\lambda_{11}+a), \\ \Delta_2 = F.(4D^2+c^2)(4D^2+a^2)(c-a)(\lambda+b)(\lambda_1+b)(\lambda_{11}+b), \\ \Delta_3 = F.(4D^2+a^2)(4D^2+b^2)(a-b)(\lambda+c)(\lambda_1+c)(\lambda_{11}+c), \\ F = \dfrac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_{11})(\lambda_1-\lambda_{11})}{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)}. \end{cases}$$

Zur Abkürzung setze ich noch:

$$(10.)\quad \begin{cases} (4D^2+b^2)(4D^2+c^2)(b-c) = \alpha, \\ (4D^2+c^2)(4D^2+a^2)(c-a) = \beta, \\ (4D^2+a^2)(4D^2+b^2)(a-b) = \gamma, \\ (a-b)(a-c)(b-c) = \mathrm{A}, \\ ab+ac+bc-4D^2 = \mathrm{B}, \\ abc-4D^2(a+b+c) = \Gamma, \end{cases}$$

so ist

$$(11.)\quad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = \mathrm{A}.\mathrm{B}, \\ a\alpha+b\beta+c\gamma = \mathrm{A}.\Gamma, \\ a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma = -4D^2\mathrm{A}.\mathrm{B}, \\ a^3\alpha+b^3\beta+c^3\gamma = -4D^2\mathrm{A}.\Gamma. \end{cases}$$

Daher wird

$$(9^a.)\quad \begin{cases} \Delta = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \\ \quad = F.\mathrm{A}\{\mathrm{B}[\lambda\lambda_1\lambda_{11}-4D^2(\lambda+\lambda_1+\lambda_{11})]+\Gamma[\lambda\lambda_1+\lambda\lambda_{11}+\lambda_1\lambda_{11}-4D^2]\}, \end{cases}$$

und somit sind $\frac{x^2}{\varrho^2}$, $\frac{y^2}{\varrho^2}$, $\frac{z^2}{\varrho^2}$ durch die neuen Variablen bestimmt.

Ferner ergeben sich die Grenzen, zwischen denen λ, λ_1, λ_{11} liegen müssen. Ist $a > b > c$, und soll $\lambda > \lambda_1 > \lambda_{11}$, so muss

$$(12.)\quad \lambda > -c > \lambda_1 > -b > \lambda_{11} > -a$$

sein, damit $\frac{x^2}{\varrho^2}$, $\frac{y^2}{\varrho^2}$, $\frac{z^2}{\varrho^2}$ positiv werden. Um ϱ^2 ebenfalls durch λ, λ_1, λ_{11} auszudrücken, hat man aus der ersten Gleichung (3.):

$$\varrho^4+\varrho^2\frac{(A\Delta_1+B\Delta_2+C\Delta_3)}{\Delta} = D^2.$$

Nun ist

$$A\Delta_1+B\Delta_2+C\Delta_3 = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A-A_1, & B-B_1, & C-C_1 \\ A-A_{11}, & B-B_{11}, & C-C_{11} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_{11}, & B_{11}, & C_{11} \end{vmatrix} = \nabla.$$

Daher

$$\frac{\varrho^2}{\Delta} = \frac{-\nabla\pm\sqrt{\nabla^2+4D^2\Delta^2}}{2\Delta^2} = \frac{2D^2}{\nabla\pm\sqrt{\nabla^2+4D^2\Delta^2}}.$$

Von den beiden Vorzeichen ist, falls D^2 positiv ist, nur das obere zu nehmen, da für das untere $\frac{x^2}{\varrho^2}$ etc. bei der obigen Grenzbestimmung für die λ negativ würde. Dass man für $\frac{x^2}{\varrho^2}$ etc. nur einen Werth erhält, hätte man auch a priori sehen können, da jeder vom Mittelpunkte aus gezogene radius vector jede der Flächen nur in einem Punkte schneidet.

Aus den Werthen (9.) ergiebt sich leicht ∇ als symmetrische Function der λ, und zwar wird:

$$(13.)\quad \begin{cases} \nabla = F.\mathrm{A}.\{\Gamma[\lambda\lambda_1\lambda_{11}-4D^2(\lambda+\lambda_1+\lambda_{11})] \\ \qquad -4D^2\mathrm{B}[\lambda\lambda_1+\lambda\lambda_{11}+\lambda_1\lambda_{11}-4D^2]\}. \end{cases}$$

Nun haben ∇ und $\varDelta$ den gemeinsamen Factor $F.\mathrm{A}$, $\sqrt{\nabla^2+4D^2\varDelta^2}$ hat somit denselben Factor, während der andere Factor nach einigen Reductionen wird:

$$\sqrt{(\Gamma^2+4D^2\mathrm{B}^2).\{[\lambda\lambda_1\lambda_{11}-4D^2(\lambda+\lambda_1+\lambda_{11})]^2+4D^2[\lambda\lambda_1+\lambda\lambda_{11}+\lambda_1\lambda_{11}-4D^2]^2\}}$$
$$= \sqrt{(a^2+4D^2)(b^2+4D^2)(c^2+4D^2)}\sqrt{(\lambda^2+4D^2)(\lambda_1^2+4D^2)(\lambda_{11}^2+4D^2)}.$$

Wird nun gesetzt

$$(14.)\quad \begin{cases} N = \Gamma[\lambda\lambda_1\lambda_{11}-4D^2(\lambda+\lambda_1+\lambda_{11})]-4D^2\mathrm{B}[\lambda\lambda_1+\lambda\lambda_{11}+\lambda_1\lambda_{11}-4D^2] \\ \qquad +\sqrt{(a^2+4D^2)(b^2+4D^2)(c^2+4D^2)}\sqrt{(\lambda^2+4D^2)(\lambda_1^2+4D^2)(\lambda_{11}^2+4D^2)}, \end{cases}$$

so wird

$$(15.)\quad \begin{cases} \frac{\varrho^2}{\varDelta} = \frac{2D^2}{F.\mathrm{A}.N}, \\ \text{und} \\ x^2 = \frac{2D^2\alpha(\lambda+a)(\lambda_1+a)(\lambda_{11}+a)}{\mathrm{A}.N}, \\ y^2 = \frac{2D^2\beta(\lambda+b)(\lambda_1+b)(\lambda_{11}+b)}{\mathrm{A}.N}, \\ z^2 = \frac{2D^2\gamma(\lambda+c)(\lambda_1+c)(\lambda_{11}+c)}{\mathrm{A}.N}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke der rechtwinkligen Coordinaten unterscheiden sich von den entsprechenden Ausdrücken in elliptischen Coordinaten nur durch den gemeinsamen Nenner N, der eine symmetrische Function der λ ist.

Man erhält ferner ein zweites, von dem eben behandelten ganz unabhängiges System von orthogonalen Flächen, wenn man in den Gleichungen (3.) und (4.) $-D^2$ an Stelle von D^2 setzt. Dadurch bleiben alle eben entwickelten Formeln wesentlich ungeändert, nur kann in diesem Falle die Wurzel im Nenner ein doppeltes Vorzeichen haben. Von besonderem

Interesse ist dieser Fall hauptsächlich deshalb, weil er für $D^2 = \infty$, während a, b, c endlich bleiben, genau in die elliptischen Coordinaten übergeht.

3.

Die weitere Untersuchung irgend einer der Flächen des obigen Systems erfordert die Kenntniss der von *Lamé* Differentialparameter erster Ordnung genannten Functionen h, h_1, h_{11}, welche durch die Gleichung

$$dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{d\lambda^2}{h^2}+\frac{d\lambda_1^2}{h_1^2}+\frac{d\lambda_{11}^2}{h_{11}^2}$$

definirt werden.

Durch logarithmisches Differentiiren der Ausdrücke (15.) ergiebt sich:

$$\frac{4}{h^2} = 4\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{x^2}{(\lambda+a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda+b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda+c)^2}-\frac{2}{N}\frac{\partial N}{\partial\lambda}\left(\frac{x^2}{\lambda+a}+\frac{y^2}{\lambda+b}+\frac{z^2}{\lambda+c}\right)+\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial\lambda}\right)^2.\varrho^2.$$

Um die folgende Rechnung zu vereinfachen, setze ich:

$$(16.)\quad \begin{cases} P = (\lambda_1\lambda_{11}-4D^2)\mathrm{B}+(\lambda_1+\lambda_{11})\Gamma, \\ Q = (\lambda_1\lambda_{11}-4D^2)\Gamma-4D^2(\lambda_1+\lambda_{11})\mathrm{B}, \\ R = \sqrt{(\lambda_1^2+4D^2)(\lambda_{11}^2+4D^2)}, \\ S = \sqrt{(a^2+4D^2)(b^2+4D^2)(c^2+4D^2)}, \\ \qquad \mathfrak{a} = a+b+c, \end{cases}$$

so wird:

$$(17.)\quad \begin{cases} \Gamma^2+4D^2\mathrm{B}^2 = S^2, \\ \Gamma Q+4D^2\mathrm{B}P = (\lambda_1\lambda_{11}-4D^2)S^2, \\ Q^2+4D^2P^2 = S^2R^2. \end{cases}$$

Ferner ist

$$N = \lambda Q-4D^2P+SR\sqrt{\lambda^2+4D^2},$$

$$\frac{x^2}{\lambda+a}+\frac{y^2}{\lambda+b}+\frac{z^2}{\lambda+c} = \frac{2D^2}{N}\cdot P,$$

$$\varrho^2 = \frac{2D^2}{N}(P\lambda+Q).$$

Endlich wird

$$\frac{x^2}{(\lambda+a)^2}+\frac{y^2}{(\lambda+b)^2}+\frac{z^2}{(\lambda+c)^2} = \frac{2D^2}{N(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)}[\lambda^2P+\lambda(\mathfrak{a}P-Q)+\mathrm{B}P-\mathfrak{a}Q+S^2].$$

Um die letzte Gleichung abzuleiten, sind ausser den Relationen (11.)

zwischen α, β, γ noch die folgenden nöthig:

$$(18.)\quad \begin{cases} \alpha(b+c)+\ \beta(c+a)+\ \gamma(a+b) = \mathrm{A}.(\mathfrak{a}\mathrm{B}-\Gamma), \\ \alpha a\,(b+c)+\beta b\,(c+a)+\gamma c\,(a+b) = \mathrm{A}.(\mathfrak{a}\Gamma+4D^2\mathrm{B}), \\ \alpha a^2(b+c)+\beta b^2(c+a)+\gamma c^2(a+b) = \mathrm{A}.4D^2(-\mathrm{B}\mathfrak{a}+\Gamma), \\ \alpha bc+\beta ca+\gamma ab = \mathrm{A}(\mathrm{B}^2-\mathfrak{a}\Gamma). \end{cases}$$

Demnach wird:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{D^2}{2N}\left\{\frac{P\lambda^2+(\mathfrak{a}P-Q)\lambda+\mathrm{B}P-\mathfrak{a}Q+S^2}{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)} - \frac{2}{N}\frac{\partial N}{\partial\lambda}P+\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial\lambda}\right)^2(P\lambda+Q)\right\}.$$

Nimmt man zunächst die Hälfte des zweiten Summanden mit dem dritten Summanden zusammen, so ergiebt sich:

$$-\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\lambda}P+\frac{1}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial\lambda}\right)^2(P\lambda+Q) = \frac{1}{N^2}\frac{\partial N}{\partial\lambda}\cdot\frac{N.SR}{\sqrt{\lambda^2+4D^2}},$$

so dass

$$\frac{1}{h^2} = \frac{D^2}{2N^2(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)}\Big\{[P\lambda^2+(\mathfrak{a}P-Q)\lambda+\mathrm{B}P-\mathfrak{a}Q+S^2]N + \frac{\partial N}{\partial\lambda}\Big[-P+\frac{SR}{\sqrt{\lambda^2+4D^2}}\Big](\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)\Big\}$$

wird; und dieser Ausdruck geht nach einigen Reductionen, mit Benutzung der Relationen (17.), in den folgenden über:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{D^2}{2N^2(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)(\lambda^2+4D^2)}\cdot\Big\{S^2(\lambda Q-4D^2P)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_{11}) + SR\sqrt{\lambda^2+4D^2}\,S^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_{11})\Big\}$$

$$= \frac{D^2S^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_{11}).N}{2N^2(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)(\lambda^2+4D^2)}.$$

Daher ist

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{h} = \dfrac{DS\sqrt{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_{11})}}{\sqrt{2N(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)(\lambda^2+4D^2)}}, \\ \dfrac{1}{h_1} = \dfrac{DS\sqrt{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\lambda_{11})}}{\sqrt{2N(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}}, \\ \dfrac{1}{h_{11}} = \dfrac{DS\sqrt{(\lambda_{11}-\lambda)(\lambda_{11}-\lambda_1)}}{\sqrt{2N(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}}. \end{cases}$$

Aus diesen Ausdrücken folgt nun leicht 1) die conforme Abbildung irgend einer Fläche des Systems, 2) die Rectification der Krümmungslinien, 3) die Complanation der Oberfläche.

1) Soll z. B. eine der Oberflächen $\lambda = \text{const.}$ auf einer Ebene abge-

bildet werden, so hat man

$$dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{1}{h_1^2}d\lambda_1^2+\frac{1}{h_{11}^2}d\lambda_{11}^2$$

$$= \frac{D^2S^2(\lambda_1-\lambda_{11})}{2N}\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda)d\lambda_1^2}{(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}+\frac{(\lambda-\lambda_{11})d\lambda_{11}^2}{(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}\right\}.$$

Der gemeinsame Factor beider Glieder, sowie auch die Factoren von $d\lambda_1^2$ und $d\lambda_{11}^2$ sind positiv (Gl. 12). Setzt man daher:

$$(20.)\quad \begin{cases} t=\displaystyle\int\frac{\sqrt{\lambda_1-\lambda}\,d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}}, \\ u=\displaystyle\int\frac{\sqrt{\lambda-\lambda_{11}}\,d\lambda_{11}}{\sqrt{(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}}, \end{cases}$$

und sind T und U die rechtwinkligen Coordinaten der Ebene, auf welcher jene Fläche $\lambda = \text{const.}$ abgebildet werden soll, so ist:

$$(21.)\quad \begin{cases} T+iU = f(t+iu), \\ T=\dfrac{f(t+iu)+f(t-iu)}{2}, \quad U=\dfrac{f(t+iu)-f(t-iu)}{2i}, \end{cases}$$

wo f eine willkürliche Function bezeichnet. Der Kartenmodul wird dabei

$$\frac{\sqrt{2N}}{DS\sqrt{\lambda_1-\lambda_{11}}}\sqrt{f'(t+iu)f'(t-iu)},$$

und für den Fall, dass den Krümmungscurven die Coordinaten T, U selbst entsprechen, wird $f'(t+iu)f'(t-iu) = 1$.

2) Die Bogen der Krümmungscurven auf einer der Flächen $\lambda = \text{const.}$ werden:

$$(22.)\quad \begin{cases} \dfrac{DS}{\sqrt{2}}\displaystyle\int\frac{\sqrt{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\lambda_{11})}\,d\lambda_1}{\sqrt{N}\sqrt{(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}} \\ \text{und} \\ \dfrac{DS}{\sqrt{2}}\displaystyle\int\frac{\sqrt{(\lambda_{11}-\lambda)(\lambda_{11}-\lambda_1)}\,d\lambda_{11}}{\sqrt{N}\sqrt{(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}}. \end{cases}$$

Diese Integrale, welche wegen des Factors $\sqrt{N}$ im Nenner eine Doppelwurzel enthalten, können noch auf eine etwas einfachere Form gebracht werden durch folgende Umformung:

Bezeichnen P_1, Q_1, R_1 diejenigen Ausdrücke, in welche die Ausdrücke P, Q, R (16.) durch Vertauschung von λ mit λ_1 übergehen, so ist

$$(23.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{Q_1\lambda_1-4D^2P_1+SR_1\sqrt{\lambda_1^2+4D^2}} = \dfrac{-Q_1\lambda_1+4D^2P_1+SR_1\sqrt{\lambda_1^2+4D^2}}{4D^2(P_1\lambda_1+Q_1)^2} \\ \quad = \frac{1}{2}\cdot\left\{\dfrac{\sqrt{-Q_1+2iDP_1}\sqrt{\lambda_1-2iD}+\sqrt{-Q_1-2iDP_1}\sqrt{\lambda_1+2iD}}{2D(P_1\lambda_1+Q_1)}\right\}^2, \end{cases}$$

da ebenso wie in (17.)

$$Q_1^2 + 4D^2 P_1^2 = S^2 R_1^2$$

wird. Das erste der Integrale (22.) wird demnach:

$$(22^a.)\quad \frac{S}{4}\int \frac{\sqrt{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\lambda_{11})}\{\sqrt{-Q_1+2iDP_1}\sqrt{\lambda_1-2iD}+\sqrt{-Q_1-2iDP_1}\sqrt{\lambda_1+2iD}\}}{\sqrt{(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1+2iD)(\lambda_1-2iD)}(P_1\lambda_1+Q_1)}\,d\lambda_1.$$

Da nun λ_1 weder in P_1 noch in Q_1 vorkommt, so ist der Bogen der Krümmungscurve gleich der Summe zweier ultraelliptischer Integrale dritter Gattung, von scheinbar imaginärer Form.

3) Ein Stück der Oberfläche $\lambda = \text{const.}$, welches zwischen zwei Krümmungscurven der einen Art λ_1 und λ_1' und zwei Krümmungscurven der zweiten Art λ_2 und λ_2' eingeschlossen ist, wird:

$$\frac{D^2S^2}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_1'}\int_{\lambda_2}^{\lambda_2'} \frac{(\lambda_1-\lambda_{11})\sqrt{(\lambda_1-\lambda)(\lambda-\lambda_{11})}\,d\lambda_1\,d\lambda_{11}}{N\sqrt{(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}\sqrt{(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}}.$$

Dies Integral theilt sich nicht, wie das entsprechende für die Oberfläche des Ellipsoids, in die Summe zweier Producte von einfachen Integralen, da der Factor N eine entsprechende Zerlegung nicht zulässt. Man kann jedoch die in N enthaltene Wurzel in den Zähler bringen, da

$$\frac{1}{N} = \frac{-Q\lambda+4D^2P+SR\sqrt{\lambda^2+4D^2}}{4D^2(P\lambda+Q)^2}$$

ist. Das obige Integral theilt sich dadurch, da P und Q lineare Functionen von $\lambda_1+\lambda_{11}$ und $\lambda_1\lambda_{11}$ sind, während

$$R = \sqrt{\lambda_1^2+4D^2}\sqrt{\lambda_{11}^2+4D^2}$$

ist, in zwei Theile, deren erster sowohl in Bezug auf λ_1, als λ_{11} ein ultraelliptisches, deren zweiter in Bezug auf λ_1 und λ_2 ein elliptisches Integral wird. Doch enthält stets das Integral nach λ_1 noch λ_2 in sich und umgekehrt. Setzt man

$$u = \int_{-c}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}} + \int_{-b}^{\lambda_2} \frac{d\lambda_{11}}{\sqrt{(\lambda-\lambda_{11})(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}},$$

$$v = \int_{-c}^{\lambda_1} \frac{\lambda_1\,d\lambda_1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1+a)(\lambda_1+b)(\lambda_1+c)(\lambda_1^2+4D^2)}} + \int_{-b}^{\lambda_2} \frac{\lambda_{11}\,d\lambda_{11}}{\sqrt{(\lambda-\lambda_{11})(\lambda_{11}+a)(\lambda_{11}+b)(\lambda_{11}+c)(\lambda_{11}^2+4D^2)}},$$

so werden $\lambda_1 . \lambda_{11}$, $\lambda_1 + \lambda_{11}$ und $\sqrt{\lambda_1^2 + 4D^2}\sqrt{\lambda_{11}^2 + 4D^2}$ ultraelliptische Functionen von u und v, die sich als rationale Functionen von θ-Functionen mit zwei Argumenten darstellen lassen. Ferner wird

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_{11}) d\lambda_1 d\lambda_{11}}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_1 + a)(\lambda_1 + b)(\lambda_1 + c)(\lambda_1^2 + 4D^2)}\sqrt{(\lambda - \lambda_{11})(\lambda_{11} + a)(\lambda_{11} + b)(\lambda_{11} + c)(\lambda_{11}^2 + 4D^2)}} = -du\,dv.$$

Somit wird das Oberflächenstück

$$\iint \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_{11})}{N}\, du\, dv,$$

wo $\frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_{11})}{N}$ eine rationale Function der Transcendenten $\theta(u, v)$ ist.

4.

Transformirt man die partielle Differentialgleichung

$$\Delta V = 0,$$

indem man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die oben definirten krummlinigen Coordinaten λ, λ_1, λ_{11} ausdrückt, so geht dieselbe über in folgende:

$$(24.)\qquad \Sigma(\lambda_1 - \lambda_{11})\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial\, \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{\sqrt{N}}\frac{\partial V}{\partial \lambda}}{\partial \lambda} = 0.$$

Darin ist

$$(25.)\qquad f(\lambda) = (\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + c)(\lambda^2 + 4D^2),$$

N ist der gemeinsame Nenner von x^2, y^2, z^2, das Zeichen Σ bedeutet, dass die linke Seite aus der Summe dreier Ausdrücke besteht, die aus dem hingeschriebenen Ausdruck durch cyklische Vertauschung von λ, λ_1, λ_{11} entstehen.

Setzt man

$$(26.)\qquad V = \sqrt[4]{N} . V_1,$$

so geht die Gleichung (24.) in folgende über:

$$(27.)\qquad 0 = N^{-\frac{1}{4}}\Sigma(\lambda_1 - \lambda_{11})\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial \sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial V_1}{\partial \lambda}}{\partial \lambda} - V_1 \Sigma(\lambda_1 - \lambda_{11})\sqrt{f(\lambda)}\,\frac{\partial \sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial N^{-\frac{1}{4}}}{\partial \lambda}}{\partial \lambda}.$$

Mit Benutzung der Bezeichnungen (16.) und der Relationen in (17.) erhält man nun für den zweiten Theil dieser Gleichung

$$\Sigma(\lambda_{\text{I}}-\lambda_{\text{II}})\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial\sqrt{f(\lambda)}\dfrac{\partial N^{-\frac{1}{4}}}{\partial\lambda}}{\partial\lambda} = -\tfrac{1}{16}N^{-\frac{1}{4}}\Sigma(5\lambda^3+3\mathfrak{a}\lambda^2)(\lambda_{\text{I}}-\lambda_{\text{II}}),$$

wo
$$\mathfrak{a} = a+b+c$$
ist. Dadurch wird:

$$(28.)\quad \Sigma(\lambda_{\text{I}}-\lambda_{\text{II}})\left\{\sqrt{f(\lambda)}\frac{\partial\sqrt{f(\lambda)}\dfrac{\partial V_1}{\partial\lambda}}{\partial\lambda}+\tfrac{1}{16}V_1(5\lambda^3+3\mathfrak{a}\lambda^2)\right\} = 0.$$

Diese Form der Gleichung lehrt, dass der Gleichung genügt wird durch

$$(29.)\quad V_1 = F(\lambda).F_1(\lambda_{\text{I}}).F_2(\lambda_{\text{II}}),$$

wo die drei Functionen F, F_1, F_2 durch ein und dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt werden, nämlich durch die Gleichung:

$$(30.)\quad f(\lambda)\frac{d^2F}{d\lambda^2}+\tfrac{1}{2}f'(\lambda)\frac{dF}{d\lambda}+\tfrac{1}{16}F(5\lambda^3+3\mathfrak{a}\lambda^2+C\lambda+C') = 0,$$

während C und C' zwei willkürliche Constante sind. Die allgemeine Lösung der Gleichung $\Delta V=0$ erhält man demnach, indem man den Parametern C und C' andere und andere Werthe beilegt, für jeden Werth den Ausdruck (29.) bildet und die verschiedenen Ausdrücke summirt.

Damit ist gezeigt, dass durch Benutzung der hier behandelten orthogonalen Coordinaten die partielle Differentialgleichung $\Delta V=0$ sich auf die Integration einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung reducirt, der Differentialgleichung (30.). Die Probleme der Attraction, der Elektricitäts- und Wärmevertheilung für einen Körper, der von irgend einer Fläche des obigen dreifach orthogonalen Systems begrenzt wird, ist damit reducirt auf die Aufgabe: Eine gegebene Function einer Variablen nach den Integralen der Gleichung (30.) zu entwickeln, wenn darin C und C' als variable Parameter betrachtet werden. Die Gleichung (30.) ist von derselben Art, wie die Gleichung, auf welche ich in der oben genannten Schrift die Gleichung $\Delta V=0$ für gewisse Rotationskörper reducirt habe, nur dass hier die Zahl der singulären Punkte um 1 (resp. 2) grösser ist. —

Bemerkung. Das hier besprochene orthogonale Flächensystem ist von einem anderen Gesichtspunkte aus von Herrn *Tissérand* in den Comptes rendus Band 72 behandelt. Herr *Tissérand* stellt sich folgende Aufgabe: Welche Form muss die Function φ haben, damit die Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda+a}+\frac{y^2}{\lambda+b}+\frac{z^2}{\lambda+c} = \varphi(x,y,z)$$

ein dreifach orthogonales Flächensystem mit dem Parameter λ vorstellt. Die Beantwortung dieser Frage führt auf eine Gleichung von der Form (3.), und damit ist bewiesen, dass es ausser dem hier besprochenen Systeme und dem Systeme der confocalen Ellipsoide und Hyperboloide keins beiden Analoges giebt. Die weitere Behandlung der Flächen findet sich jedoch bei *Tissérand* nicht, und auch die im ersten Abschnitt von mir aufgestellte Bedingung der Orthogonalität dreier Flächen von der Form (3.), auf die ich durch ganz andere Betrachtungen geführt bin, scheint mir einfacher zu sein als die Orthogonalitätsbedingungen bei *Tissérand*.

Berlin, im Mai 1876.

Zusatz zu der Abhandlung über Kugelfunctionen S. 86 des 80. Bandes.

(Von Herrn *Leopold Schendel* in Tokio.)

---

1. Vermittelst der *Leibniz*schen Formel für den höheren Differentialquotienten eines Products lässt sich leicht zeigen, dass, wenn n, $n+a$, $n+b$, $n+a+b$ positive ganze Zahlen bedeuten, die Gleichung

$$\overline{n+a}!(x-1)^{-\frac{a}{2}}(x+1)^{+\frac{b}{2}}\frac{d^{n+b}(x-1)^{n+a+b}(x+1)^n}{dx^{n+b}}$$

$$= \overline{n+b}!(x-1)^{+\frac{a}{2}}(x+1)^{-\frac{b}{2}}\frac{d^{n+a}(x-1)^n(x+1)^{n+a+b}}{dx^{n+a}}$$

$$= n!(x-1)^{+\frac{a}{2}}(x+1)^{+\frac{b}{2}}\frac{d^{n+a+b}(x-1)^{n+b}(x+1)^{n+a}}{dx^{n+a+b}}$$

$$= \overline{n+a+b}!(x-1)^{-\frac{a}{2}}(x+1)^{-\frac{b}{2}}\frac{d^n(x-1)^{n+a}(x+1)^{n+b}}{dx^n}$$

besteht.

Für $a=-k$, $b=+k$ und $a=-k-1$, $b=k$ erhält man aus derselben die Formeln

$$\overline{n-k}!(x^2-1)^{+\frac{k}{2}}\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}} = \overline{n+k}!(x^2-1)^{-\frac{k}{2}}\frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}$$

$$= n!(x-1)^{-\frac{k}{2}}(x+1)^{+\frac{k}{2}}\frac{d^n(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k}}{dx^n}$$

$$= n!(x-1)^{+\frac{k}{2}}(x+1)^{-\frac{k}{2}}\frac{d^n(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+k}}{dx^n},$$

$$\overline{n-1-k}!(x^2-1)^{+\frac{k}{2}}(x-1)^{+\frac{1}{2}}\frac{d^{n+k}(x^2-1)^{n-1}(x+1)}{dx^{n+k}}$$

$$= \overline{n+k}!(x^2-1)^{-\frac{k}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^{n-1-k}(x^2-1)^{n-1}(x-1)}{dx^{n-1-k}}$$

$$= n!(x-1)^{-\frac{k+1}{2}}(x+1)^{+\frac{k}{2}}\frac{d^{n-1}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-1-k}}{dx^{n-1}}.$$

$$= \overline{n-1}!(x-1)^{+\frac{k+1}{2}}(x+1)^{-\frac{k}{2}}\frac{d^n(x-1)^{n-1-k}(x+1)^{n+k}}{dx^n},$$

in denen $n \geqq k$, resp. $k+1$ ist.

Man erkennt aus ihnen, dass sich die Kugelfunctionen $P_k^n(x)$ und die ihnen zugeordneten Functionen $A_k^{n-1}(x)$ auch durch die Doppelgleichungen

$$P_k^n(x) = \frac{n!(x-1)^{-\frac{k}{2}}(x+1)^{+\frac{k}{2}}}{2^n.\overline{n-k}!\,\overline{n+k}!}\frac{d^n(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-k}}{dx^n}$$

$$= \frac{n!(x-1)^{+\frac{k}{2}}(x+1)^{-\frac{k}{2}}}{2^n.\overline{n+k}!\,\overline{n-k}!}\frac{d^n(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+k}}{dx^n},$$

$$A_k^{n-1}(x) = \frac{n!(x-1)^{-\frac{k}{2}-1}(x+1)^{+\frac{k}{2}}}{2^{n-1}.\overline{n+k}!\,\overline{n-1-k}!}\frac{d^{n-1}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-1-k}}{dx^{n-1}}$$

$$= \frac{\overline{n-1}!(x-1)^{+\frac{k}{2}}(x+1)^{-\frac{k}{2}}}{2^{n-1}.\overline{n-1-k}!\,\overline{n+k}!}\frac{d^n(x-1)^{n-1-k}(x+1)^{n+k}}{dx^n}$$

definiren lassen.

Für die so definirten Functionen lassen sich nun in gleicher Weise vier dieselben in Beziehung zu einander setzende Formeln ableiten, von denen wir aber nur die aus den Gleichungen

$$\frac{d(x-1)^{n+1+k}(x+1)^{n+1-k}}{dx}$$

$$= \overline{n+1-k}(x-1)^{n+1+k}(x+1)^{n-k} + \overline{n+1+k}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n+1-k},$$

$$\frac{d(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+1+k}}{dx}$$

$$= \overline{n+1+k}(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+k} + \overline{n-k}(x-1)^{n-1-k}(x+1)^{n+1+k}$$

vermittelst der Operationen

$$\frac{\overline{n+1}!(x-1)^{-\frac{k+1}{2}}(x+1)^{+\frac{k}{2}}}{2^n.\overline{n+1-k}!\,\overline{n+1+k}!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}, \quad \frac{n!(x-1)^{+\frac{k}{2}}(x+1)^{-\frac{k}{2}}}{2^n.\overline{n+1+k}!\,\overline{n-k}!}\frac{d^n}{dx^n}$$

hervorgehenden einfachen Formeln

$$2(x-1)^{-\frac{1}{2}}P_k^{n+1}(x) = (x-1)^{+\frac{1}{2}}A_k^n(x) + (x+1)^{+\frac{1}{2}}A_{k-1}^n(x),$$

$$A_k^n(x) = P_k^n(x) + (x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{+\frac{1}{2}}P_{k+1}^n(x)$$

anführen.

Die letzte führt in Verbindung mit der Gleichung

$$n(x-1)A_k^{n-1}(x) = \overline{n-k}P_k^n(x) - nP_k^{n-1}(x)$$

auf die Formel

$$\frac{n+1-k}{n+1}P_k^{n+1}(x) = xP_k^n(x) + (x^2-1)^{\frac{1}{2}}P_{k+1}^n(x),$$

aus der, da demgemäss zufolge der Relation $P^n_{+k}(x) = P^n_{-k}(x)$ offenbar auch die Formel

$$\frac{n+1+k}{n+1} P_k^{n+1}(x) = x P_k^n(x) + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} P_{k-1}^n(x)$$

besteht, die Relation

$$\overline{n+1+k}\, P_{k+1}^n(x) + \frac{2kx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} P_k^n(x) - \overline{n+1-k}\, P_{k-1}^n(x) = 0$$

sich ergiebt. Ferner gelangt man vermittelst der obigen Formeln zu der entsprechenden Relation

$$\overline{n+1-k}\, A_{k+1}^{n-1}(x) + \frac{\overline{2k+1}\, x+1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} A_k^{n-1}(x) - \overline{n-k}\, A_{k-1}^{n-1}(x) = 0.$$

Für die Kugelfunctionen $Q_k^n(x)$ und die ihnen zugeordneten Functionen $B_k^{n-1}(x)$ lassen sich natürlich analoge Definitionsgleichungen aufstellen und analoge Relationen ableiten, die man in leichter Weise aus den obigen erhält, wenn man beachtet, dass offenbar

$$\overline{-1}!\, P_k^{-n-1}(x) = 2(-1)^{k+1} Q_k^n(x), \quad \overline{-1}!\, A_k^{-n-1}(x) = 2(-1)^k B_k^{n-1}(x)$$

ist. Es ist

$$Q_k^n(x) = \frac{2^n . \overline{n-k}!\, \overline{n+k}!\, (x-1)^{-\frac{k}{2}} (x+1)^{+\frac{k}{2}}}{n!} \frac{d^{-n-1}(1-x)^{-n-1+k}(1+x)^{-n-1-k}}{dx^{-n-1}}$$

$$= \frac{2^n . \overline{n+k}!\, \overline{n-k}!\, (x-1)^{+\frac{k}{2}} (x+1)^{-\frac{k}{2}}}{n!} \frac{d^{-n-1}(1-x)^{-n-1-k}(1+x)^{-n-1+k}}{dx^{-n-1}},$$

$$B_k^{n-1}(x) = \frac{2^n . \overline{n+k}!\, \overline{n-1-k}!\, (x-1)^{-\frac{k}{2}-1} (x+1)^{+\frac{k}{2}}}{\overline{n-1}!} \frac{d^{-n-1}(1-x)^{-n+k}(1+x)^{-n-1-k}}{dx^{-n-1}}$$

$$= \frac{2^n . \overline{n+k}!\, \overline{n-1-k}!\, (x-1)^{+\frac{k}{2}} (x+1)^{-\frac{k}{2}}}{n!} \frac{d^{-n}(1-x)^{-n-1-k}(1+x)^{-n+k}}{dx^{-n}}$$

und ferner

$$\overline{n-k}\, Q_{k+1}^n(x) + \frac{2kx}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} Q_k^n(x) - \overline{n+k}\, Q_{k-1}^n(x) = 0,$$

$$\overline{n-k}\, B_{k+1}^{n-1}(x) + \frac{\overline{2k+1}\, x+1}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} B_k^{n-1}(x) - \overline{n+k}\, B_{k-1}^{n-1}(x) = 0.$$

2. Die Kugelfunctionen und deren Zugeordnete sind von uns nur für den Fall $n \geqq k$, resp. $k+1$ definirt worden. Gleichwohl kann man sie durch die gegebenen Definitionsgleichungen einführen auch für den ausgeschlossenen

Fall $n < k$, resp. $k+1$, wenn man diese, je nachdem sie die Functionen erster oder zweiter Art bestimmen, mit $\overline{-1}!$ multiplicirt oder dividirt und demgemäss sich in diesem Falle die Functionen $P_k^n(x)$, $A_k^{n-1}(x)$ stets mit dem Factor $\overline{-1}!$ und die Functionen $Q_k^n(x)$, $B_k^{n-1}(x)$ mit dem Factor $\frac{1}{\overline{-1}!}$ behaftet vorstellt. Es werden dadurch nicht allein die entwickelten Formeln allgemeingültig, sondern auch die beiden zusammengehörigen Formeln

$$(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{-n-1} = P^n(x) + 2\sum_1^\infty (-1)^k \frac{\overline{n+k}!\,\overline{n-k}!}{n!^2} P_k^n(x)\cos k\varphi,$$

$$Q^n(z) = P^n(x)\,Q^n(x_1) + 2\sum_1^\infty (-1)^k P_k^n(x)\,Q_k^n(x_1)\cos k\varphi$$

in höchst einfacher Form darstellbar. Den Recursionsformeln sind zum Zwecke der Berechnung der Functionen die besonderen Werthe

$$\overline{-1}!\,P_k^{k-1}(x) = \frac{\overline{k-1}!^2(x^2-1)^{\frac{k}{2}}}{2^{k-1}} \sum_0^{k-1} (-1)^\lambda \frac{(x-1)^\lambda (x+1)^{-1-\lambda}}{\overline{k+\lambda}!\,\overline{k-1-\lambda}!},$$

$$\overline{-1}!\,P_k^{k-2}(x) = \frac{\overline{k-2}!^2(x^2-1)^{\frac{k}{2}}}{2^{k-2}} \sum_0^{k-2} (-1)^{\lambda+1} \frac{(\lambda+1)(x-1)^\lambda (x+1)^{-2-\lambda}}{\overline{k+\lambda}!\,\overline{k-2-\lambda}!};$$

$$\overline{-1}!\,A_k^{k-1}(x) = \frac{k!\,\overline{k-1}!\,(x^2-1)^{\frac{k}{2}}}{2^{k-1}} \sum_0^{k-1} (-1)^\lambda \frac{(x-1)^\lambda (x+1)^{-1-\lambda}}{\overline{k+1+\lambda}!\,\overline{k-1-\lambda}!},$$

$$\overline{-1}!\,A_k^{k-2}(x) = \frac{\overline{k-1}!\,\overline{k-2}!\,(x^2-1)^{\frac{k}{2}}}{2^{k-2}} \sum_0^{k-2} (-1)^{\lambda+1} \frac{(\lambda+1)(x-1)^\lambda (x+1)^{-2-\lambda}}{\overline{k+1+\lambda}!\,\overline{k-2-\lambda}!};$$

$$Q_k^{k-1}(x) = \overline{-1}!\,(-1)^k.\,2^{k-1}(x^2-1)^{-\frac{k}{2}}, \quad Q_k^{k-2}(x) = -(k-1)\,x\,Q_k^{k-1}(x);$$

$$B_k^{k-1}(x) = \overline{-1}!\,(-1)^{k+1}.\,2^k(x^2-1)^{-\frac{k}{2}}(x-1)^{-1}, \quad B_k^{k-2}(x) = -\frac{\overline{2k-1}\,x+1}{2} B_k^{k-1}(x)$$

beizufügen. Die Integrationsgrenzen sind 1 und x für die Functionen $P_k^n(x)$ und $A_k^{n-1}(x)$.

Es scheint übrigens in Ansehung der Relation

$$\overline{-1}!\,P_k^{-n-1}(x) = 2(-1)^{k+1}\,Q_k^n(x)$$

empfehlenswerther, die Bedeutung des Functionszeichens $Q_k^n(x)$ dahin abzuändern, dass man $Q_k^n(x)$ für $2(-1)^{k+1}Q_k^n(x)$ zu setzen hat; vielleicht ist es noch besser, dieses Functionszeichen ganz aufzugeben und statt dessen sich des Zeichens $\overline{-1}!\,P_k^{-n-1}(x)$ zu bedienen. Es sind dann particuläre Integrale der Differentialgleichung der Kugelfunctionen die Functionen

$$P_k^n(x), \quad \overline{-1}!\,P_k^{-n-1}(x) \quad \text{oder} \quad \overline{-1}!\,P_k^n(x), \quad P_k^{-n-1}(x),$$

je nachdem $n \geqq k$ oder $< k$ ist. Analoges gilt selbstverständlich auch von den Zugeordneten.

Wir stellen nun mit Berücksichtigung hiervon die gegebenen Cosinusreihen noch in folgender Weise zusammen:

$$P^n(z) = P^n(x)P^n(x_1) + 2\sum_1^\infty (-1)^k.\frac{\overline{n+k}!\,\overline{n-k}!}{n!^2} P_k^n(x)P_k^n(x_1)\cos k\varphi,$$

$$P^{-n-1}(z) = P^n(x)P^{-n-1}(x_1) + 2\sum_1^\infty P_k^n(x)P_k^{-n-1}(x_1)\cos k\varphi,$$

$$(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{-n-1} = P^n(x) + 2\sum_1^\infty (-1)^k.\frac{\overline{n+k}!\,\overline{n-k}!}{n!^2} P_k^n(x)\cos k\varphi,$$

$$(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n = P^n(x) + 2\sum_1^\infty P_k^n(x)\cos k\varphi.$$

Die dritte Formel, die der ersten gleichgebildet ist, geht aus der zweiten, und ebenso die vierte Formel, die mit der zweiten dieselbe bemerkenswerthe Aehnlichkeit hat, aus der ersten für $x_1 = \infty$ hervor. In der ersten und vierten Formel kann als oberer Summationsindex auch n angenommen werden.

3. Unter den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen durch hypergeometrische Reihen genügt werden kann, ist besonders bemerkenswerth die Differentialgleichung

$$(x^2-1)f''(x) + (2-k)xf'(x) - n(n+1-k)f(x) = 0,$$

welche die Eigenschaft hat, dass, wenn $f(x)$ ein particuläres Integral derselben ist, auch $(x^2-1)^{\frac{k}{2}} f^k(x)$ ein solches ist.

Nimmt man in dieser Gleichung k einmal gerade und das andere Mal ungerade an und ersetzt demgemäss k durch $-2k$ und durch $-\overline{2k+1}$ und ausserdem n durch $n-k$ resp. $n-1-k$, so erhält man die folgenden zwei Differentialgleichungen

$$(x^2-1)f''(x) + (2k+2)xf'(x) - (n-k)(n+1+k)f(x) = 0,$$
$$(x^2-1)f''(x) + (2k+3)xf'(x) - (n^2-\overline{k+1}^2)f(x) = 0,$$

denen als particuläre Integrale die Functionen

$$f(x),\quad (x^2-1)^{-k}f^{-2k}(x);\quad f(x),\quad (x^2-1)^{-\frac{1}{2}-k}f^{-2k-1}(x)$$

oder auch die Functionen

$$f^k(x),\quad (x^2-1)^{-k}f^{-k}(x);\quad f^{k+1}(x),\quad (x^2-1)^{-\frac{1}{2}-k}f^{-k}(x)$$

genügen, wenn $f(x)$ ein particuläres Integral für den Fall $k=0$, resp. -1 ist.

Demnach genügen als particuläre Integrale die Functionen

$$(x^2-1)^{+\frac{k}{2}} f^{+k}(x), \quad (x^2-1)^{-\frac{k}{2}} f^{-k}(x)$$

der Differentialgleichung

$$(x^2-1)f''(x)+2xf'(x)-\Big(n(n+1)+\frac{k^2}{x^2-1}\Big)f(x) = 0,$$

und die Functionen

$$(x^2-1)^{\frac{k+1}{2}} f^{k+1}(x), \quad (x^2-1)^{-\frac{k}{2}} f^{-k}(x)$$

der Differentialgleichung

$$(x^2-1)f''(x)+xf'(x)-\Big(n^2+\frac{k(k+1)}{x^2-1}\Big)f(x) = 0,$$

wenn $f(x)$ beziehungsweise ein particuläres Integral der Differentialgleichungen

$$(x^2-1)f''(x)+2xf'(x)-n(n+1)f(x) = 0,$$
$$(x^2-1)f''(x)+xf'(x)-n^2f(x) = 0$$

ist.

Die erste Gleichung ist die Differentialgleichung der Kugelfunctionen, und dass ihr in der That die bezeichneten Functionen als particuläre Integrale genügen, zeigt die *Jacobi*sche Formel, nach der sie sich nur um einen numerischen Factor von einander unterscheiden.

Die zweite Gleichung dagegen, die mit der ersten eine merkwürdige Aehnlichkeit hat und die unverändert bleibt bei Vertauschung von n mit $-n$ und k mit $-\overline{k+1}$, ebenso wie die Differentialgleichung der Kugelfunctionen bei Vertauschung von k mit $-k$ und n mit $-\overline{n+1}$, kann als die Differentialgleichung der Kreisfunctionen bezeichnet werden. Denn schreibt man sie in der Form

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d(1-x^2)^{\frac{1}{2}}f'(x)}{dx}+\Big(n^2+\frac{k(k+1)}{x^2-1}\Big)f(x) = 0$$

und setzt dann $x=\cos\vartheta$, so nimmt sie offenbar die Form der Differentialgleichung

$$f''(\vartheta)+(n^2-k(k+1)\operatorname{cosec}^2\vartheta)f(\vartheta) = 0$$

an, der für $k=0$ als particuläre Integrale die Functionen

$$\sin n\vartheta, \quad \cos n\vartheta$$

genügen.

Der Differentialgleichung

$$(x^2-1)f''(x)+xf'(x)-n^2f(x) = 0$$

genügen als particuläre Integrale die Functionen

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}, \quad (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

und wir können demnach vier particuläre Integrale der in Rede stehenden Differentialgleichung angeben. Dieselben sind mit einander verbunden durch die Gleichung

$$\overline{n+1}^{-k-1|1}\frac{d^{k+1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}}{dx^{k+1}} = n^{k+1|1}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}-k}\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-k-1}}$$

und die aus dieser durch Vertauschung von k mit $-\overline{k+1}$ hervorgehende Gleichung. Die dem Falle $k=0$ entsprechenden particulären Integrale stehen ausserdem, wie man vermittelst einer bekannten Formel für den Differentialquotienten $\frac{d^n(1+ax^2)^\mu}{dx^n}$ *) leicht findet, zu den Kreisfunctionen in der folgenden Beziehung:

$$-n.2^{-n}.\tfrac{1}{2}^{-n|1}\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = \sin n \arccos x,$$

$$2^{-n}.\tfrac{1}{2}^{-n|1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} = \cos n \arccos x.$$

Aus derselben Formel ergiebt sich auch die Relation

$$\frac{d^{2n}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{2n}} = (-1)^n.(1.3\ldots\overline{2n-1})^2.(x^2-1)^{-n-\frac{1}{2}},$$

und hieraus unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$2^{+n}.\tfrac{1}{2}^{+n|1} = 1.3\ldots\overline{2n-1}, \quad 2^{-n}.\tfrac{1}{2}^{-n|1} = \frac{(-1)^n}{1.3\ldots\overline{2n-1}}$$

die Relation

$$2^{-n}.\tfrac{1}{2}^{-n|1}\frac{d^{+n}(x^2-1)^{+n-\frac{1}{2}}}{dx^{+n}} = 2^{+n}.\tfrac{1}{2}^{+n|1}\frac{d^{-n}(x^2-1)^{-n-\frac{1}{2}}}{dx^{-n}},$$

in welcher sich die Eigenschaft der Differentialgleichung, bei Vertauschung von n mit $-n$ unverändert zu bleiben, ausspricht.

Tokio (Yedo), im December 1875.

---

*) *Schlömilch*, Comp. d. h. Analysis II, 2. Aufl. p. 7.

Zur Theorie der Gammafunction.

(Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg.)

Das schon *Euler* bekannte Product:

$$\mathfrak{P}(z,n) = \frac{1}{z}\,\frac{2^z}{1^{z-1}(z+1)}\,\frac{3^z}{2^{z-1}(z+2)}\cdots\frac{n^z}{(n-1)^{z-1}(z+n-1)}$$
$$= \frac{(n-1)!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)},$$

wobei z eine beliebige complexe Zahl bedeutet und unter n^z derjenige Werth der Reihe $1+z\ln n+\frac{z^2}{2!}\ln^2 n+\cdots$ zu verstehen ist, welcher dem reell genommenen Logarithmus der positiven ganzen Zahl n entspricht, convergirt nach den Untersuchungen von *Gauss* (Werke, Bd. 3. pag. 145) und Herrn *Weierstrass* (Theorie der analytischen Facultäten, dieses Journal Bd. 51) für jedes von $0, -1, -2, \dots$ verschiedene endliche z mit unbegrenzt wachsendem n gegen eine nur von z abhängige, mit $\Gamma(z)$ zunächst zu bezeichnende Grenze, so dass also

$$\Gamma(z) = \lim_{n=\infty}\mathfrak{P}(z,n) = \lim_{n=\infty}\frac{(n-1)!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}.$$

Die auf diese Weise definirte Grösse $\Gamma(z)$ steht aber zu der Grösse z nicht nur in eindeutiger Beziehung, sondern sie ist auch eine einwerthige Function der complexen Variable z im Sinne der neueren Functionentheorie. Einen Beweis dafür hat zuerst Herr *Weierstrass* in der erwähnten Arbeit (pag. 40) gegeben, indem er zeigte, dass die von ihm mit $Fc(z)$ bezeichnete Function $[\Gamma(z)]^{-1}$ sich nach ganzen Potenzen von z in eine für jeden Modul von z convergirende Reihe entwickeln lässt. Es ist demnach $\Gamma(z)$ eine einwerthige Function der complexen Variable z, die mit Ausnahme der Punkte $0, -1, -2, \dots$, wo sie ∞^1 wird, und des unendlich entfernten Punktes der Zahlenebene, wo sie eine Unstetigkeit der dritten Art besitzt, in der ganzen übrigen Ebene allenthalben stetig ist.

Die Function $\Gamma(z)$, unter dem Namen der Gammafunction allgemein bekannt, genügt den Gleichungen:

$$\text{(I.)}\quad \lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 1, \qquad \text{(II.)}\quad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z),$$

(unter n hier und immer eine positive ganze Zahl verstanden), in dem Sinne, dass die erste Gleichung für jedes endliche z gilt, die zweite, streng ge-

nommen, nur für die von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedenen Werthe von z, da für $z = 0, -1, -2, \ldots$ das Zeichen $\Gamma(z)$ ohne Bedeutung ist. Die zweite Relation erhält man, indem man in der Gleichung

$$\mathfrak{P}(z+1, n) = z\,\mathfrak{P}(z, n)\frac{1}{1+\frac{z}{n}},$$

die Werthe $z = 0, -1, -2, \ldots$ ausgeschlossen, bei unbegrenzt wachsendem n zur Grenze übergeht. Bildet man dann durch wiederholte Anwendung der gewonnenen Relation (II.) die Gleichung

$$\frac{\Gamma(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = \frac{z(z+1)\ldots(z+n-1)\,\Gamma(z)}{(n-1)!\,n^z} = \frac{\Gamma(z)}{\mathfrak{P}(z, n)},$$

so folgt aus dieser sofort die Relation (I.), indem man, unter Berücksichtigung von $\lim \mathfrak{P}(z, n) = \Gamma(z)$, bei unbegrenzt wachsendem n zur Grenze übergeht. Die Gültigkeit der Relation (I.) für $z = 0, -1, -2, \ldots$ erschliesst man direct.

„*Die Gleichungen* (I.) *und* (II.) *bestimmen, wie später bewiesen wird, für sich allein die Function* $\Gamma(z)$ *vollständig.*“

Untersucht man nun die Verwandtschaft der Gammafunction mit den rationalen Functionen, so erscheint diese Verwandtschaft zunächst als eine ziemlich weite. Denn eine für jeden Werth von z geltende Darstellung dieser Function durch ein Product von Linearfactoren mit den Exponenten ± 1, wie sie für die rationalen, die trigonometrischen und viele andere einwerthige Functionen existirt, ist hier unmöglich. Ein jeder Factor von $\mathfrak{P}(z, n)$ enthält im Zähler eine Exponentialfunction. Dagegen existirt für die Gammafunction ebenso wie für die genannten Functionen eine für jedes z gültige Darstellung durch eine Summe von Partialbrüchen und ganzen Potenzen von z, so dass die Verwandtschaft der Gammafunction mit den rationalen Functionen denn doch eine nähere ist, als es zunächst den Anschein hat, wenn man nur die Darstellung durch ein unendliches Product, von der oben ausgegangen wurde, berücksichtigt. Diese Darstellung von $\Gamma(z)$ durch eine Summe von Partialbrüchen und ganzen Potenzen von z ist gewiss auch schon von anderen Mathematikern bemerkt worden. In dem mir zugänglichen Theile der äusserst umfangreichen Literatur über die Gammafunction habe ich eine solche nicht finden können. Ich lege auf dieselbe aber auch nur insofern Werth, als sich dadurch eine Zerlegung der Gammafunction in zwei einfachere Functionen, $P(z)$ und $Q(z)$, ergiebt, die durch ebenso einfache Bedingungen, wie die oben für $\Gamma(z)$ aufgestellten Bedingungen (I.) und (II.) es sind, vollständig definirt werden können.

Um zu der erwähnten Darstellung und Zerlegung zu gelangen, bemerke man, dass die Function $\Gamma(z)$ im Endlichen nur für die Punkte $z=0$, -1, -2, ... unstetig wird und zwar ∞^1. Berücksichtigt man dann, dass, unter ν eine positive ganze Zahl, die Null nicht ausgeschlossen, verstanden,

$$\lim_{z=-\nu}(z+\nu)\,\Gamma(z) = \lim_{z=-\nu}(z+\nu)\frac{\Gamma(z+\nu+1)}{(z+\nu)(z+\nu-1)\dots(z+1)z} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!},$$

so folgt, dass $\Gamma(z)-\frac{(-1)^\nu}{\nu!(z+\nu)}$, wenn eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen, für den Punkt $z=-\nu$ stetig bleibt.

Man bilde jetzt die unendliche Reihe

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{1!(z+1)}+\frac{1}{2!(z+2)}-\dots+\frac{(-1)^\nu}{\nu!(z+\nu)}+\dots,$$

so convergirt dieselbe für jedes von 0, -1, -2, ... verschiedene z. Da ferner ein jedes Glied dieser Reihe sich für die Umgebung irgend eines von 0, -1, -2, ... verschiedenen Punktes a der Ebene durch eine nach ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darstellen lässt, die für das Innere eines um a als Mittelpunkt beschriebenen Kreises, der keinen der Punkte 0, -1, -2, ... einschliesst, convergirt; auch die auf diese Weise aus der obigen Reihe entstehende doppelt unendliche Reihe unbedingt convergirt, da die ihr entsprechende Modulenreihe convergirt, und ihr Werth demnach von der Anordnung ihrer Glieder unabhängig ist; so kann man den Werth $P(z)$ der obigen Reihe für das Innere des um a beschriebenen Kreises durch eine nach den ganzen Potenzen von $z-a$ fortschreitende Reihe darstellen, und es stellt demnach

$$P(z) = \frac{1}{z}-\frac{1}{1!(z+1)}+\frac{1}{2!(z+2)}-\frac{1}{3!(z+3)}+\dots$$

eine einwerthige Function der complexen Variable z dar, die mit Ausnahme der Punkte $z=0$, -1, -2, ..., wo sie ∞^1 wird, und des unendlich entfernten Punktes, wo sie eine Unstetigkeit der dritten Art besitzt, in der ganzen übrigen Ebene allenthalben stetig ist.

Die so definirte Function $P(z)$ genügt den Gleichungen:

$$(\mathrm{I}_1.)\quad \lim_{n=\infty}\frac{P(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = 0, \qquad (\mathrm{II}_1.)\quad P(z+1) = zP(z)-\frac{1}{e},$$

in dem Sinne, dass die erste Gleichung für jedes endliche z gilt, die zweite, streng genommen, nur für die von $z=0$, -1, -2, ... verschiedenen Werthe von z, da für $z=0$, -1, -2, ... das Zeichen $P(z)$ ohne Bedeutung ist. Die erste Relation ergiebt sich, indem man berücksichtigt, dass bei unbe-

grenzt wachsendem n, welchen Werth auch z besitzt, $P(z+n)$ gegen Null convergirt und gleichzeitig der Modul von $(n-1)!n^z$ über alle Grenzen wächst. Die zweite Relation dagegen folgt durch eine leichte Rechnung aus der die Function $P(z)$ definirenden Gleichung. Durch wiederholte Anwendung der Relation (II_1.), unter Ausschluss der Werthe $z=0, -1, -2, \ldots$, erhält man die Gleichung

$$P(z) = \frac{1}{e}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\cdots+\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\right]+\frac{P(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

aus der sich, unter Berücksichtigung von $\lim_{n=\infty} P(z+n)=0$, sofort

$$P(z) = \lim_{n=\infty}\frac{1}{e}\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\cdots+\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\right]$$

ergiebt, so dass die Function $eP(z)$ für die ganze Ebene auch durch die unendliche Reihe

$$eP(z) = \frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\cdots+\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}+\cdots$$

dargestellt wird.

„*Die Gleichungen* (I_1.) *und* (II_1.) *bestimmen, wie später bewiesen wird, für sich allein die Function $P(z)$ vollständig.*“

Man bilde jetzt die Differenz der Functionen $\Gamma(z)$ und $P(z)$ und bezeichne dieselbe durch $Q(z)$,

$$Q(z) = \Gamma(z)-P(z),$$

so ist $Q(z)$ ebenfalls eine einwerthige Function der complexen Variable z. Die Functionen $\Gamma(z)$ und $P(z)$ werden im Endlichen nur für die Punkte $z=0, -1, -2, \ldots, -\nu, \ldots$ unstetig, und zwar allgemein für den Punkt $z=-\nu$ so, dass

$$\lim_{z=-\nu}\left[\Gamma(z)-\frac{(-1)^\nu}{\nu!(z+\nu)}\right] \quad \text{und} \quad \lim_{z=-\nu}\left[P(z)-\frac{(-1)^\nu}{\nu!(z+\nu)}\right]$$

bestimmte Grössen sind. Erklärt man demnach als Werth $Q(-\nu)$ der Function $Q(z)$ für den Punkt $z=-\nu$ (wo die obige Gleichung versagt, indem ihre rechte Seite die Form $\infty-\infty$ annimmt) den immer existirenden Grenzwerth der Differenz $\Gamma(z)-P(z)$ für $\lim z=-\nu$, so ist die auf diese Weise vollständig definirte Grösse $Q(z)$ eine einwerthige Function der complexen Variable z, die mit Ausnahme des unendlich entfernten Punktes der Zahlenebene, wo sie eine Unstetigkeit der zweiten Art besitzt, in der ganzen übrigen Ebene, d. h. für jeden endlichen Werth von z stetig ist. In Folge dieser Eigenschaften lässt sich die Function $Q(z)$, nach bekanntem Satze der Functionentheorie, auch durch eine nach den ganzen Potenzen von z fortschreitende,

für jeden Modul von z convergirende unendliche Reihe darstellen, so dass also

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

wobei die c gewisse, von z freie Constanten bedeuten. Die Bestimmung dieser Constanten ergiebt sich ohne Mühe, wenn man berücksichtigt, dass für positive Werthe x von z:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{x-1} d\xi, \quad P(x) = \int_0^1 e^{-\xi} \xi^{x-1} d\xi,$$

und daher

$$Q(x) = \Gamma(x) - P(x) = \int_1^\infty e^{-\xi} \xi^{x-1} d\xi.$$

Die erste dieser drei Gleichungen ist bekannt. Die zweite verificirt man, indem man $e^{-\xi}$ durch die Exponentialreihe ersetzt, und die dadurch unter dem Integralzeichen entstehende Reihe gliedweise nach ξ zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt. Aus der dritten Gleichung ergiebt sich dann, indem man die rechte Seite derselben nach den ganzen Potenzen von x entwickelt, für c_ν der Werth

$$c_\nu = \frac{1}{\nu!} \int_1^\infty e^{-\xi} \ln^\nu \xi \, \frac{d\xi}{\xi}.$$

Die Function $Q(z)$ genügt für jedes endliche z den Gleichungen:

$$(\mathrm{I}_2.) \quad \lim_{n=\infty} \frac{Q(z+n)}{(n-1)!\, n^z} = 1, \qquad (\mathrm{II}_2.) \quad Q(z+1) = z\,Q(z) + \frac{1}{e}.$$

Die erste Relation ergiebt sich, indem man die Gleichung

$$Q(z+n) = \Gamma(z+n) - P(z+n)$$

beiderseits durch $(n-1)!\, n^z$ dividirt und dann bei unbegrenzt wachsendem n, unter Berücksichtigung der Relationen (I.) und (I$_1$.), zur Grenze übergeht. Um die Relation (II$_2$.) zu erhalten, subtrahirt man von der Gleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ die Gleichung $P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e}$ und ersetzt dann $\Gamma(z+1) - P(z+1)$ durch $Q(z+1)$, $\Gamma(z) - P(z)$ durch $Q(z)$.

„*Die Gleichungen* (I$_2$.) *und* (II$_2$.) *bestimmen, wenn zudem für* $z = 0$ *eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist, die Function* $Q(z)$, *wie im Folgenden bewiesen wird, vollständig.*"

Nachdem so die gewünschte Darstellung für die Gammafunction gewonnen ist, auch gleichzeitig die Zerlegbarkeit von $\Gamma(z)$ in zwei einfachere Functionen $P(z)$ und $Q(z)$, so dass $\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$, sich ergeben hat, bleibt schliesslich noch nachzuweisen, dass die Gleichungen (I.), (II.) die Function $\Gamma(z)$, die Gleichungen (I$_1$.), (II$_1$.) die Function $P(z)$, endlich die

Gleichungen (I_2.), (II_2.) die Function $Q(z)$ vollständig bestimmen. Die drei diese Behauptungen aussprechenden, schon vorher kurz markirten Sätze sind aber nur specielle Fälle eines allgemeineren Satzes, der sich wie folgt aussprechen lässt:

Satz. Bedeutet $S(z)$ ein dem Punkte z der Ebene beigeschriebenes Symbol, so dass nach dieser Bezeichnung den äquidistanten Punkten $z+1$, $z+2$, ..., $z+n$, ... die Symbole $S(z+1)$, $S(z+2)$, ..., $S(z+n)$, ... beziehlich zukommen, und gewinnt dann das Zeichen $S(z+n)$ von einer, durch das z, von dem man ausging, bestimmten ganzen Zahl n (die auch Null sein kann) an die Bedeutung einer mit der ganzen Zahl n sich so ändernden Grösse, dass

$$(\mathrm{I}'.)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{S(z+n)}{(n-1)!\,n^z} = k,$$

wo k eine von z freie Constante, deren Werth beliebig, bezeichnet: ist dann ferner $S(z)$ mit $S(z+1)$ durch die Relation

$$(\mathrm{II}'.)\qquad S(z+1) = zS(z)+l,$$

wo l ebenfalls eine von z freie Constante mit beliebigem Werthe bedeutet, verknüpft, und zwar in dem Sinne, dass diese Gleichung $S(z+1)$ oder $S(z)$ erklärt und bestimmt, jenachdem feststeht, dass $S(z)$ oder dass $S(z+1)$ für das betreffende z nicht bedeutungslos, und zudem für $z=0$ eine hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist: so stimmt die so definirte Grösse $S(z)$ für jeden Punkt z der Ebene mit der Function $(k-le)P(z)+kQ(z)$ überein.

Zunächst bemerke man, dass die Function $(k-le)P(z)+kQ(z)$ in der That den Gleichungen (I'.), (II'.) genügt, dass also diese Gleichungen nichts Unmögliches verlangen. Es bleibt demnach nur noch nachzuweisen, dass auch jede, die Bedingungen (I'.), (II'.) erfüllende Grösse $S(z)$ mit der genannten Function übereinstimmt. Zum Beweise dessen fixire man irgend ein von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedenes z, dann lässt sich nach der ersten Voraussetzung zu diesem z eine positive ganze Zahl n finden, so dass $S(z+n)$ eine bestimmte Zahl bedeutet, folglich auch

$$S(z+n-1),\quad S(z+n-2),\quad \ldots,\quad S(z),$$

wie die Anwendung der Gleichung (II'.) sofort ergiebt, da z nicht Null und auch keine negative ganze Zahl sein soll. Damit ist zunächst bewiesen, dass $S(z)$ für jedes von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene z einen bestimmten Werth hat. Bildet man jetzt, unter Ausschluss der Werthe $z=0, -1, -2, \ldots$, durch wiederholte, n-malige (n beliebig) Anwendung

von (II'.) die Gleichung:

$$S(z) = -l\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\cdots+\frac{1}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\right] + \frac{S(z+n)}{(n-1)!\,n^z}\,\frac{(n-1)!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)},$$

und lässt dann die Zahl n, deren Aenderung den Werth von $S(z)$ und folglich auch den Werth der rechten Seite der Gleichung nicht beeinflusst, unbegrenzt wachsen, so convergirt die in der eckigen Klammer stehende Grösse, wie schon früher bemerkt, gegen die Grenze $eP(z)$, der erste Factor des hinter der eckigen Klammer stehenden Productes, der Voraussetzung (I'.) gemäss, gegen die Grenze k, der zweite Factor, als mit $\mathfrak{P}(z,n)$ identisch, gegen die Grenze $\Gamma(z) = P(z)+Q(z)$. Durch Uebergang zu den Grenzen folgt also $S(z) = -leP(z)+k(P(z)+Q(z))$: womit weiter bewiesen, dass die Grösse $S(z)$ für jeden von $0, -1, -2, \dots$ verschiedenen Punkt der Ebene denselben Werth wie die Function $(k-le)P(z)+kQ(z)$ besitzt; speciell für den Punkt $z=1$ demnach den Werth $S(1) = k-le+l$, da $P(1) = 1-e^{-1}$, $Q(1) = e^{-1}$ ist. Es handelt sich schliesslich noch um das Verhalten von $S(z)$ für die, bei der vorhergehenden Betrachtung ausgeschlossenen Punkte $z = 0, -1, -2, \dots$ In Bezug hierauf unterscheide man den Fall, wo $k-le$ nicht gleich Null, von dem Falle, wo $k-le$ gleich Null ist. Im ersten Falle ist das Symbol $S(0)$ jedenfalls bedeutungslos; denn wäre $S(0)$ eine bestimmte Zahl, so müsste in Folge der Relation (II'.), die für $z=0$ in $S(1) = 0.S(0)+l$ übergeht, $S(1)$ gleich l sein, während es doch den von l verschiedenen Werth $k-le+l$ besitzt. Mit $S(0)$ zugleich sind aber auch immer die Symbole $S(-1)$, $S(-2)$, ... bedeutungslos, denn wäre $S(-\nu)$ eine bestimmte Zahl, so wären in Folge von (II'.) auch $S(-\nu+1)$, $S(-\nu+2)$, ..., $S(0)$ bestimmte Zahlen. Für dieselben Punkte $z = 0, -1, -2, \dots$ ist aber auch $(k-le)P(z)+kQ(z)$ ohne Bedeutung: es stimmt also in diesem ersten Falle $S(z)$ vollständig mit der Function $(k-le)P(z)+kQ(z)$ überein. Im zweiten Falle, wo $k-le = 0$ ist, stimmt die Grösse $S(z)$, wie vorher bewiesen, jedenfalls für alle von $0, -1, -2, \dots$ verschiedenen Punkte z mit der Function $kQ(z) = leQ(z)$ überein. Wäre nun $S(z)$ für $z=0$ bedeutungslos, oder repräsentirte $S(0)$ einen von $leQ(0)$ verschiedenen Werth, so besässe, da $Q(z)$ für $z=0$ stetig, $S(z)$ für diesen Punkt eine hebbare Unstetigkeit, was gegen die unter (II'.) in dem obigen Satze gemachte Voraussetzung verstiesse. Es ist demnach $S(0) = leQ(0)$, und

daher auch $S(-1) = leQ(-1)$, $S(-2) = leQ(-2)$, ..., da die Gleichung

$$S(z+1) = z.S(z)+l,$$

welche die Grösse $S(z)$ von $z=0$ nach $z=-1, -2, \ldots$ fortsetzt, dieselbe Form besitzt wie die Gleichung $leQ(z+1) = z.leQ(z)+l$, welche die Function $leQ(z)$ von $z=0$ nach $z=-1, -2, \ldots$ fortsetzt. Die Grösse $S(z)$ stimmt also in diesem zweiten Falle für jeden Punkt z der Ebene mit der Function $leQ(z) = kQ(z)$ überein, und demnach auch, da $k-le=0$, mit der Function $(k-le)P(z)+kQ(z)$. Damit ist der aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Für $k=1$, $l=0$ gehen die Bedingungen (I'.), (II'.) in die Bedingungen (I.), (II.) über und $S(z)$ wird $P(z)+Q(z) = \Gamma(z)$. Für $k=0$, $l=-e^{-1}$ gehen (I'.), (II'.) in (I_1.), (II_1.) über und $S(z)$ wird $P(z)$. Für $k=1$, $l=e^{-1}$ endlich gehen (I'.), (II'.) in (I_2.), (II_2.) über und $S(z)$ wird $Q(z)$. Die auf diese Weise aus dem allgemeinen Satze entstehenden drei speciellen Sätze stimmen mit den schon früher markirten Sätzen überein.

Das Resultat der ganzen Untersuchung lässt sich jetzt wie folgt aussprechen:

„Es existiren zwei von z abhängige Grössen $P(z)$ und $Q(z)$, von denen die erste durch die Bedingungen (I_1.), (II_1.) allein, die zweite durch die Bedingungen (I_2.), (II_2.), unter Ausschluss einer hebbaren Unstetigkeit für $z=0$, vollständig bestimmt ist, und deren analytische Ausdrücke beziehlich

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!(z+1)} + \frac{1}{2!(z+2)} - \cdots,$$

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad c_\nu = \frac{1}{\nu!}\int_1^\infty e^{-\xi} \ln^\nu \xi \frac{d\xi}{\xi},$$

sind. Beide Grössen sind einwerthige Functionen der complexen Variable z, die erste mit dem Charakter einer echtgebrochenen rationalen Function, die zweite mit dem Charakter einer ganzen Function. Aus ihnen entstehen, indem man vermittelst zweier willkürlicher Constanten p, q die Form $pP(z)+qQ(z)$ bildet und dann für p, q alle möglichen Zahlenpaare setzt, unendlich viele Functionen, von denen eine jede zweien speciellen Gleichungen von der Form (I'.), (II'.) genügt, und auch umgekehrt durch diese ihr speciell entsprechenden Gleichungen allein vollständig bestimmt erscheint. Unter all diesen zusammengesetzten Functionen zeichnet sich die den Werthen $p=q=1$ entsprechende Function $P(z)+Q(z)$ durch besondere Eigenschaften aus und erweist sich als identisch mit dem unter dem Namen der Gammafunction bekannten Gebilde."

Würzburg, im Juni 1876.

Ueber die reciproke Verwandtschaft von F^2-Systemen und Φ^2-Geweben und die quadratischen F^2-Systeme achter Stufe.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Die geometrischen Verwandtschaften der Collineation und der Reciprocität werden bekanntlich algebraisch durch lineare Transformationen homogener Punkt- oder Ebenencoordinaten dargestellt. Ihr Begriff ist daher einer solchen Erweiterung fähig, dass er auch auf das F^n-System und das Φ^n-Gewebe von $N(n) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$ Dimensionen anwendbar wird; und zwar ergiebt sich diese Verallgemeinerung, wie ich in einer früheren Arbeit*) gezeigt habe, ohne Weiteres aus einer geometrischen Deutung von linearen Substitutionen, durch welche die $N(n)+1$ homogenen Coordinaten einer Fläche n^{ter} Ordnung F^n oder n^{ter} Classe Φ^n in andere transformirt werden. Dass diese Verallgemeinerung eine nützliche ist, und dass sie der geometrischen Forschung wichtige Hülfsmittel und Methoden an die Hand giebt, dürfte sich an den einfachsten Fällen am besten nachweisen lassen.

Wir wollen zu dem Ende die reciproke Verwandtschaft für den Fall $n=2$ ausführlicher, als es a. a. O. geschehen konnte, erörtern; um jedoch die Analogie der Fälle $n=1$ und $n=2$ gebührend hervorzuheben, schicken wir in §. 1 eine kurze Theorie der reciproken Verwandtschaft von F^1-Systemen und Φ^1-Geweben voraus. Wie diese sofort zu den Flächen zweiten Grades führt, so führt die reciproke Verwandtschaft im Falle $n=2$ geradesweges zu den quadratischen F^2-Systemen und Φ^2-Geweben achter Stufe. Ihrer Untersuchung, insbesondere ihrer Eintheilung in Hauptarten und ihrer Polarentheorie ist ein grosser Theil (§. 3) dieser Arbeit gewidmet; das Auftreten des allgemeinen Strahlencomplexes zweiten Grades ist für gewisse sehr specielle Arten derselben bezeichnend. Weniger ausführlich wird das Nullsystem von neun Dimensionen erörtert (§. 5), welches dem gewöhnlichen Nullsystem analog ist, sich aber durch grössere Mannigfaltigkeit interessanter

---

*) „Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen", in diesem Bande, S. 17.

Eigenschaften vor letzterem auszeichnet. Aus dem Abschnitte über die Flächen vierter Classe oder vierter Ordnung (§. 4) heben wir hier nur das merkwürdige Ergebniss hervor, dass aus einer Φ^4 oder F^4 eine ganze Reihe solcher Flächen ($\Phi^4, F^4, \Phi_1^4, F_1^4, \Phi_2^4, \ldots$) abgeleitet werden kann, von welchen jede durch die vorhergehende eindeutig bestimmt ist, und die alle zu der ersten und zu einander in sehr innigen invarianten Beziehungen stehen. Analoges gilt von einer Φ^{2n} oder F^{2n}, wie denn überhaupt alle wichtigeren Ergebnisse dieser Arbeit leicht auf den allgemeinen Fall $n = n$ übertragen werden können.

§. 1. Reciproke Transformationen des Raumes von drei Dimensionen.

1. Zwei Räume R_x und R_y seien auf je ein tetraëdrisches Coordinatensystem bezogen, und es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punktes x von R_x, und y_1, y_2, y_3, y_4 diejenigen eines Punktes y von R_y. Sind die x_i veränderlich, so repräsentirt die lineare homogene Gleichung:

$$(a.)\qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

eine Ebene ξ von R_x, und ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 heissen die homogenen Coordinaten dieser Ebene, ebenso sind η_1, η_2, η_3, η_4 die Coordinaten einer Ebene von R_y, deren Gleichung $\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0$ ist.

Durch eine bilineare Gleichung von der Form:

$$(b.)\qquad \left\{\begin{aligned} &(l_{11}y_1 + l_{12}y_2 + l_{13}y_3 + l_{14}y_4)x_1 \\ +&(l_{21}y_1 + l_{22}y_2 + l_{23}y_3 + l_{24}y_4)x_2 \\ +&(l_{31}y_1 + l_{32}y_2 + l_{33}y_3 + l_{34}y_4)x_3 \\ +&(l_{41}y_1 + l_{42}y_2 + l_{43}y_3 + l_{44}y_4)x_4 \end{aligned}\right\} = 0$$

werden nun mit jedem Punkte des einen Raumes unendlich viele Punkte des anderen ***verknüpft***, und zwar liegen dieselben in einer dem Punkte ***entsprechenden*** Ebene. Nämlich je zwei Punkte x und y, deren Coordinaten der Gleichung ($b.$) genügen, sind durch ($b.$) mit einander „verknüpft"; und ist einer der Punkte gegeben, so repräsentirt ($b.$) die ihm „entsprechende" Ebene, d. h. den geometrischen Ort des anderen Punktes. Durch die bilineare Gleichung wird also zwischen den Räumen R_x und R_y eine reciproke Beziehung hergestellt, so dass jedem Punkte des einen Raumes eine Ebene des anderen zugewiesen ist. Wird $x_i = p_i + k.q_i$ gesetzt und lässt man sodann den Parameter k sich ändern, so beschreibt der Punkt x eine Punktreihe pq; zugleich aber beschreibt die ihm entsprechende Ebene einen zu

$\overline{pq}$ projectivischen Ebenenbüschel, weil (*b.*) die Form $P+k.Q=0$ annimmt, wenn die Gleichungen $P=0$ und $Q=0$ die beiden den Punkten p und q entsprechenden Ebenen von R_y darstellen.

2. Bringen wir die Gleichung der Ebene ξ von R_x, welche einem beliebigen Punkte y von R_y entspricht, auf die Form (*a.*), so ergeben sich durch Vergleichung mit (*b.*) folgende Ausdrücke für die Ebenencoordinaten ξ_i:

$$(c.)\qquad \xi_i = l_{i1}y_1+l_{i2}y_2+l_{i3}y_3+l_{i4}y_4 \quad \text{für} \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Es ist unnöthig, in diesen vier Gleichungen die ξ_i mit einem Proportionalitätsfactor zu versehen, denn bei der Bestimmung der Ebene ξ kommt es nur auf die *Verhältnisse* ihrer Coordinaten an. — Für die Coordinaten der Ebene η von R_y, welche einem beliebigen Punkte x von R_x entspricht, ergeben sich ebenso die Ausdrücke:

$$(d.)\qquad \eta_i = l_{1i}x_1+l_{2i}x_2+l_{3i}x_3+l_{4i}x_4 \quad \text{für} \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Also die Coordinaten der Ebenen beider Räume gehen durch lineare Substitutionen über in die Coordinaten der ihnen entsprechenden Punkte. Diese Substitutionen (*c.*) und (*d.*) entstehen aus einander durch Transposition.

Ein Punkt des einen Raumes beschreibt eine F^n, wenn seine entsprechende Ebene in dem anderen Raume eine Φ^n umhüllt; oder *jeder Φ^n von R_x oder R_y entspricht eine F^n in R_y resp. R_x.* Die Gleichung $f^n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=0$ einer Φ^n von R_x geht nämlich durch die Substitution (*c.*) über in die Gleichung der entsprechenden F^n von R_y.

3. Eliminiren wir die Punktcoordinaten y_i aus der Gleichung

$$\eta_1y_1+\eta_2y_2+\eta_3y_3+\eta_4y_4 = 0$$

der Ebene η und den vier Gleichungen (*c.*), oder die x_i aus (*a.*) und (*d.*), so erhalten wir für die Coordinaten von zwei Ebenen, von denen die eine den der anderen entsprechenden Punkt enthält, die bilineare Gleichung:

$$(e.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ \xi_2 & l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ \xi_3 & l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ \xi_4 & l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Durch dieselbe sind mit jeder Ebene ξ oder η des einen Raumes unendlich viele Ebenen des anderen verknüpft, nämlich alle, welche durch den entsprechenden Punkt gehen. Die bilineare Gleichung (*e.*) repräsentirt ganz

dieselbe reciproke Verwandtschaft der Räume R_x und R_y, wie (*b.*), wenn $\Sigma \pm l_{11} l_{22} l_{33} l_{44} \gtrless 0$ ist; sie kann durch Einführung der ersten Minoren λ_{ik} der Determinante $\Sigma \pm l_{11} l_{22} l_{33} l_{44}$ leicht auf dieselbe Form wie (*a.*) gebracht werden, und aus ihr können für die y_i und die x_i diejenigen linearen Substitutionen abgeleitet werden, welche sich aus (*c.*) und (*d.*) durch Inversion ergeben.

Wenn die Determinante $\Sigma \pm l_{11} l_{22} l_{33} l_{44}$ der Substitutionen (*c.*) und (*d.*) verschwindet, so giebt es in jedem der Räume R_x und R_y einen Punkt, mit welchem durch die Gleichung (*b.*) *alle* Punkte des anderen Raumes verknüpft sind; durch diesen Punkt gehen alle Ebenen, welche den Punkten des anderen Raumes entsprechen. Nämlich die Coordinaten dieses ausgezeichneten Punktes z. B. von R_y befriedigen drei und folglich jede der vier Gleichungen:

$$l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + l_{i3} y_3 + l_{i4} y_4 = 0 \quad \text{für} \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

und somit auch die Gleichung (*b.*), welche Werthe auch die x_i haben mögen. Wir schliessen diesen singulären Fall aus.

4. Es giebt unendlich viele Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen, und zwar ist ihr geometrischer Ort im Allgemeinen eine F^2. Sind die beiden Räume, wie wir von jetzt an voraussetzen, auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogen, so erhält man die Gleichung dieser F^2, indem man in (*b.*) einsetzt:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \;=\; y_1 : y_2 : y_3 : y_4,$$

also die Bedingung aufstellt, unter welcher ein Punkt x oder y mit sich selbst verknüpft ist. — Alle Ebenen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, umhüllen im Allgemeinen eine Φ^2; die Gleichung dieser Φ^2 ergiebt sich, wenn in (*e.*) allgemein $\xi_i = \eta_i$ gesetzt wird. Da ein Punkt von F^2 sowohl zu R_x als auch zu R_y gerechnet werden kann, so entsprechen ihm im Allgemeinen zwei verschiedene durch ihn gehende Ebenen von Φ^2, nämlich eine in R_y und eine in R_x, und F^2 wird von den Ebenen der Fläche Φ^2 im Allgemeinen nicht berührt. Man kann F^2 und Φ^2 etwa die ***Ordnungsflächen der reciproken Räume*** nennen; sie sind nicht von einander unabhängig, weil sie und die reciproke Verwandtschaft durch die 16 Constanten l_{ik} oder vielmehr durch die 15 unabhängigen Verhältnisse zwischen diesen l_{ik} bestimmt sind.

Für diese 15 Verhältnisse erhalten wir aus (*b.*) eine Gleichung, wenn irgend zwei mit einander verknüpfte Punkte gegeben sind, und aus (*c.*) oder

(*d.*) drei Gleichungen, wenn von irgend einem Punkte des einen Raumes die entsprechende Ebene des anderen gegeben ist. Man kann also zwei Räume so auf einander reciprok beziehen, dass mit 15 beliebigen Punkten (oder Ebenen) des einen ebenso viele beliebige Punkte (resp. Ebenen) des anderen verknüpft sind, oder so, dass irgend fünf Punkten des einen fünf willkürlich angenommene Ebenen des anderen entsprechen.

5. Die reciproke Beziehung der beiden Räume ist eine *involutorische*, wenn jedem beliebigen Punkte, mag er nun zu R_x oder zu R_y gerechnet werden, beidemal dieselbe Ebene entspricht, oder mit anderen Worten, wenn die Gleichung (*b.*) bei Vertauschung der x_i mit den resp. y_i sich nicht ändert. Hiebei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist *erstens* $l_{ik} = l_{ki}$ für i und $k = 1, 2, 3, 4$, so ist die reciproke Beziehung diejenige des *räumlichen Polarsystemes*. Die Ordnungsflächen F^2 und Φ^2 sind in diesem Falle identisch, und die Constanten l_{ik}, deren Anzahl sich auf zehn reducirt, sind die homogenen Coordinaten von F^2. Je zwei mit einander verknüpfte Punkte oder Ebenen sind in Bezug auf F^2 einander conjugirt, und jedem Punkte entspricht seine Polarebene bezüglich dieser Ordnungsfläche des Polarsystemes.

Ist *zweitens* $l_{ik} = -l_{ki}$ und demnach $l_{ii} = 0$, so liegt jeder Punkt auf der ihm entsprechenden Ebene, und die Ordnungsflächen F^2 und Φ^2 werden unbestimmt. Nämlich die linke Seite der Gleichung (*b.*) wird in diesem Falle, wenn man $x_i = y_i$ setzt, identisch Null, und ebenso die linke Seite von (*e.*), wenn man $\xi_i = \eta_i$ setzt. Die beiden reciproken Räume bilden demnach zusammen ein *Nullsystem* *); jeder Punkt liegt in der ihm entsprechenden *Nullebene*, und jede Ebene geht durch den ihr entsprechenden *Nullpunkt*. Jede Gerade, welche zwei mit einander verknüpfte Punkte verbindet, fällt zusammen mit der Schnittlinie der entsprechenden beiden, gleichfalls mit einander verknüpften Ebenen, d. h. mit ihrer entsprechenden Geraden, und heisst ein *Leitstrahl* des Nullsystemes. Die Anzahl der Constanten l_{ik}, von deren Verhältnissen das Nullsystem abhängt, ist sechs; es giebt also fünffach unendlich viele Nullsysteme. Aus der Form:

$$l_{12}(x_1 y_2 - y_1 x_2) + l_{13}(x_1 y_3 - y_1 x_3) + \cdots + l_{24}(x_2 y_4 - y_2 x_4) + l_{34}(x_3 y_4 - y_3 x_4) = 0$$

der Gleichung (*b.*) ist sofort ersichtlich, dass alle Leitstrahlen des Null-

*) Nach *Moebius*, Dieses Journal Bd. 10, S. 317.

systemes einen linearen Strahlencomplex bilden; denn die sechs Ausdrücke $x_i y_k - y_i x_k$ sind die tetraëdrischen Coordinaten eines beliebigen Leitstrahles.

§. 2. Reciproke Transformationen von F^2-Systemen und Φ^2-Geweben.

6. Wir bezeichnen wie in einer früheren Arbeit mit $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ die zehn homogenen Coordinaten einer F^2 und mit $a_{ik} = a_{ki}$ diejenigen einer Φ^2 des Raumes R_x, indem wir die Gleichungen dieser Flächen schreiben:

$$\alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \alpha_{22} x_2^2 + 2\alpha_{13} x_1 x_3 + \cdots + 2\alpha_{34} x_3 x_4 + \alpha_{44} x_4^2 = 0$$

und

$$a_{11} \xi_1^2 + 2a_{12} \xi_1 \xi_2 + a_{22} \xi_2^2 + 2a_{13} \xi_1 \xi_3 + \cdots + 2a_{34} \xi_3 \xi_4 + a_{44} \xi_4^2 = 0.$$

Ebenso bezeichnen wir mit β_{ik} und b_{ik} die Coordinaten einer F^2 resp. Φ^2 des Raumes R_y. Wenn wir andeuten wollen, dass eine Fläche zweiten Grades zum Raume R_x oder zu R_y gerechnet werden soll, so bezeichnen wir sie mit F_x^2, Φ_x^2 resp. F_y^2, Φ_y^2. — Die Gleichung:

$$(A.) \qquad a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + 2a_{13}\alpha_{13} + 2a_{23}\alpha_{23} + \cdots + a_{44}\alpha_{44} = 0$$

zwischen den Coordinaten einer F_x^2 und einer Φ_x^2 ist erfüllt, wenn diese beiden Flächen zu einander apolar sind, wenn also Φ_x^2 auf F_x^2 ruht oder einem Poltetraëder von F_x^2 eingeschrieben ist.

Durch eine bilineare Gleichung von der Form:

$$(B.) \qquad \left\{\begin{array}{l} \quad\;\, (l_{11}^{11}\beta_{11} + 2l_{12}^{11}\beta_{12} + l_{22}^{11}\beta_{22} + 2l_{13}^{11}\beta_{13} + \cdots + l_{44}^{11}\beta_{44})\,\alpha_{11} \\ + 2(l_{11}^{12}\beta_{11} + 2l_{12}^{12}\beta_{12} + l_{22}^{12}\beta_{22} + 2l_{13}^{12}\beta_{13} + \cdots + l_{44}^{12}\beta_{44})\,\alpha_{12} \\ + \;\;(l_{11}^{22}\beta_{11} + 2l_{12}^{22}\beta_{12} + l_{22}^{22}\beta_{22} + 2l_{13}^{22}\beta_{13} + \cdots + l_{44}^{22}\beta_{44})\,\alpha_{22} \\ + 2(l_{11}^{13}\beta_{11} + 2l_{12}^{13}\beta_{12} + l_{22}^{13}\beta_{22} + 2l_{13}^{13}\beta_{13} + \cdots + l_{44}^{13}\beta_{44})\,\alpha_{13} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \;\;(l_{11}^{44}\beta_{11} + 2l_{12}^{44}\beta_{12} + l_{22}^{44}\beta_{22} + 2l_{13}^{44}\beta_{13} + \cdots + l_{44}^{44}\beta_{44})\,\alpha_{44} \end{array}\right\} = 0$$

werden nun mit jeder F^2 des einen Raumes unendlich viele F^2 des anderen „verknüpft;" dieselben bilden ein lineares F^2-System achter Stufe und stützen eine der F^2 „entsprechende" Φ^2. Letztere wird von den zweifachen Ebenen des F^2-Systemes eingehüllt.

Durch die bilineare Gleichung $(B.)$ wird also zwischen den F^2-Systemen und den Φ^2-Geweben der Räume R_x und R_y eine reciproke Beziehung hergestellt; jeder F_x^2 oder F_y^2 wird eine Φ_y^2 resp. Φ_x^2 zugewiesen, jedem F_x^2-Büschel, wie leicht einzusehen ist (1.), eine zu ihm projectivische Φ_y^2-Schaar, u. s. w.

7. Sind β_{ik} und a_{ik} die Coordinaten von zwei einander entsprechenden Flächen F_y^2 und Φ_x^2, so lehrt der Vergleich von (*B.*) mit (*A.*), dass die a_{ik} durch folgende Substitution in die β_{ik} übergehen:

$$(C.)\qquad a_{ik} = l_{11}^{ik}\beta_{11}+2l_{12}^{ik}\beta_{12}+l_{22}^{ik}\beta_{22}+2l_{13}^{ik}\beta_{13}+\cdots+l_{44}^{ik}\beta_{44}.$$

Auf ähnliche Art ergeben sich für die Coordinaten b_{ik} der Φ_y^2, welche einer bestimmten F_x^2 entspricht, aus (*B.*) die linearen Ausdrücke:

$$(D.)\qquad b_{ik} = l_{ik}^{11}\alpha_{11}+2l_{ik}^{12}\alpha_{12}+l_{ik}^{22}\alpha_{22}+2l_{ik}^{13}\alpha_{13}+\cdots+l_{ik}^{44}\alpha_{44}.$$

Die Substitutionen (*C.*) und (*D.*), welche abgesehen vom Factor 2 durch Transposition aus einander entstehen, können so gut wie die Gleichung (*B.*) aufgefasst werden als der algebraische Ausdruck für die reciproke Beziehung der F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe beider Räume. Jedem Φ^2-Gewebe p^{ter} Stufe g^{ten} Grades des einen Raumes entspricht, weil die Substitutionen linear sind, ein F^2-System p^{ter} Stufe g^{ten} Grades in dem anderen Raume (vgl. 2.).

8. Eliminiren wir die zehn F_y^2-Coordinaten β_{ik} aus der Gleichung:

$$(A_1.)\qquad b_{11}\beta_{11}+2b_{12}\beta_{12}+b_{22}\beta_{22}+2b_{13}\beta_{13}+\cdots+b_{44}\beta_{44} = 0$$

und den zehn Gleichungen (*C.*), oder die zehn α_{ik} aus (*A.*) und den zehn Gleichungen (*D.*), so erhalten wir für die Coordinaten a_{ik} und b_{ik} zweier Flächen Φ_x^2 und Φ_y^2, von denen jede auf der der anderen entsprechenden F^2 ruht, die bilineare Gleichung:

$$(E.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} & b_{22} & b_{13} & \dots & b_{44} \\ a_{11} & l_{11}^{11} & l_{12}^{11} & l_{22}^{11} & l_{13}^{11} & \dots & l_{44}^{11} \\ a_{12} & l_{11}^{12} & l_{12}^{12} & l_{22}^{12} & l_{13}^{12} & \dots & l_{44}^{12} \\ a_{22} & l_{11}^{22} & l_{12}^{22} & l_{22}^{22} & l_{13}^{22} & \dots & l_{44}^{22} \\ a_{13} & l_{11}^{13} & l_{12}^{13} & l_{22}^{13} & l_{13}^{13} & \dots & l_{44}^{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{44} & l_{11}^{44} & l_{12}^{44} & l_{22}^{44} & l_{13}^{44} & \dots & l_{44}^{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Durch dieselbe sind mit jeder Φ^2 des einen Raumes achtfach unendlich viele Φ^2 des anderen verknüpft, nämlich alle, welche auf die entsprechende F^2 sich stützen. Auch diese Gleichung repräsentirt, wenn der singuläre Fall $\Delta=0$ ausgeschlossen wird (s. u.), die reciproke Beziehung der F^2-Systeme und der Φ^2-Gewebe beider Räume; wie sie aus (*B.*) sich ergab, so lässt sich auch umgekehrt (*B.*) aus ihr ableiten.

Bezeichnen wir nämlich mit λ_{mn}^{ik} die ersten Minoren der Determinante:

$$\Delta = \Sigma \pm l_{11}^{11}l_{12}^{12}l_{22}^{22}l_{13}^{13}\dots l_{44}^{44},$$

so kann die Gleichung (*E.*) auch geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_{11}^{11}b_{11}+\lambda_{12}^{11}b_{12}+\lambda_{22}^{11}b_{22}+\lambda_{13}^{11}b_{13}+\cdots+\lambda_{44}^{11}b_{44})a_{11}\\ +(\lambda_{11}^{12}b_{11}+\lambda_{12}^{12}b_{12}+\lambda_{22}^{12}b_{22}+\lambda_{13}^{12}b_{13}+\cdots+\lambda_{44}^{12}b_{44})a_{12}\\ +(\lambda_{11}^{22}b_{11}+\lambda_{12}^{22}b_{12}+\lambda_{22}^{22}b_{22}+\lambda_{13}^{22}b_{13}+\cdots+\lambda_{44}^{22}b_{44})a_{22}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ +(\lambda_{11}^{44}b_{11}+\lambda_{12}^{44}b_{12}+\lambda_{22}^{44}b_{22}+\lambda_{13}^{44}b_{13}+\cdots+\lambda_{44}^{44}b_{44})a_{44}\end{array}\right\}=0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Vergleichung mit (*A.*) die zu (*D.*) inverse Substitution, welche die Coordinaten α_{ik} einer F_x^2 als lineare Functionen der zehn Coordinaten b_{ik} der entsprechenden Φ_y^2 darstellt. Durch Elimination der b_{ik} aus den zehn Gleichungen dieser Substitution und aus (*A*$_1$.) ergiebt sich aber die Gleichung:

$$(F.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \beta_{11} & 2\beta_{12} & \dots & \beta_{44}\\ \alpha_{11} & \lambda_{11}^{11} & \lambda_{12}^{11} & \dots & \lambda_{44}^{11}\\ 2\alpha_{12} & \lambda_{11}^{12} & \lambda_{12}^{12} & \dots & \lambda_{44}^{12}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{44} & \lambda_{11}^{44} & \lambda_{12}^{44} & \dots & \lambda_{44}^{44}\end{vmatrix}=0,$$

welche sich von (*B.*) nur durch den Factor $-\triangle^8$, also ganz unwesentlich unterscheidet.

Der so geführte Beweis unserer Behauptung, dass (*B.*) auch aus (*E.*) abgeleitet werden kann, gilt nicht in dem singulären Fall, wenn die Determinante $\triangle$ der Substitutionen (*C.*) und (*D.*) verschwindet. In diesem Falle, den wir vorläufig ganz ausschliessen, giebt es in jedem der Räume R_x und R_y eine F^2, mit welcher *alle* F^2 des anderen Raumes durch die Gleichung (*B.*) verknüpft sind (vgl. 3.).

9. Die reciproke Verwandtschaft des F_x^2-Systemes und des Φ_y^2-Gewebes neunter Stufe hängt ab von den 99 Verhältnissen der 100 Constanten l_{mn}^{ik}. Sie ist im Allgemeinen bestimmt, wenn von 11 beliebigen F_x^2 die ihnen entsprechenden Φ_y^2, oder wenn 99 beliebige Paare mit einander verknüpfter Flächen F_x^2 und F_y^2 gegeben sind (4.).

Im Allgemeinen giebt es achtfach unendlich viele F^2, welche ihre entsprechenden Φ^2 stützen, von denen also jede durch die Gleichung (*B.*) mit sich selbst verknüpft ist. Sind, wie schon oben angenommen wurde, die Räume R_x und R_y auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung für die Coordinaten α_{ik} dieser F^2,

wenn wir in (B.) allgemein $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$ setzen. Ebenso geht (E.), wenn $b_{ik} = a_{ik}$ gesetzt wird, über in die Bedingungsgleichung für diejenigen Φ^2, welche durch (E.) mit sich selbst verknüpft sind und folglich auf den ihnen entsprechenden F^2 ruhen. Die beiden Bedingungsgleichungen sind quadratisch für die α_{ik} resp. a_{ik}; also:

Alle F^2, welche ihre entsprechenden Φ^2 stützen, bilden im Allgemeinen ein quadratisches F^2-System achter Stufe, und alle Φ^2, welche auf ihren entsprechenden F^2 ruhen, bilden ebenso ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe. Diese beiden quadratischen Flächenmannigfaltigkeiten sind auf zweifache Art reciprok auf einander bezogen;

nämlich jeder Fläche der einen entspricht, mag sie nun zum Raume R_x oder zu R_y gerechnet werden, beidemal eine, wenn auch nicht dieselbe Fläche der anderen Mannigfaltigkeit.

10. Alle F^2_x, deren entsprechende Φ^2_y sich auf Punktenpaare reduciren, bilden ein F^2-System sechster Stufe zehnten Grades; denn alle Punktenpaare von R_y bilden ein Φ^2-Gewebe sechster Stufe zehnten Grades*). Dieses F^2-System zehnten Grades enthält vierfach unendlich viele F^2-Bündel, denen die Punktenpaare von je einer Geraden entsprechen, und dreifach unendlich viele lineare F^2-Systeme dritter Stufe, deren entsprechende Φ^2-Gewebe aus Punktenpaaren mit je einem gemeinschaftlichen Punkte bestehen. Das oben (9.) erwähnte quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe enthält im Allgemeinen fünffach unendlich viele Punktenpaare; jedes derselben ruht auf der ihm entsprechenden F^2, d. h. seine beiden Punkte y, y' sind einander conjugirt bezüglich dieser F^2. Setzt man in (E.) allgemein $2b_{ik} = 2a_{ik} = y_i y'_k + y_k y'_i$, so erhält man für die Coordinaten dieser mit sich selbst verknüpften Punktenpaare eine Bedingungsgleichung; dieselbe lehrt, dass jeder gegebene Punkt y mit unendlich vielen anderen Punkten y', deren Ort eine F^2 ist, solche mit sich selbst verknüpfte Punktenpaare bildet. Die Beziehung zwischen den Punkten y und y' ist eine quadratische und involutorische.

Alle F^2_x, deren entsprechende Φ^2_y sich auf zweifache Punkte reduciren, bilden ein F^2-System dritter Stufe achten Grades**). Dasselbe enthält keinen einzigen F^2-Büschel und ist in keinem linearen F^2-System von acht oder weniger als acht Dimensionen enthalten. Alle F^2_x, denen zwei-

*) Vgl. meine Arbeit „über lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades“ in diesem Bande, S. 63.

**) Ebenda S. 64.

fache Punkte einer Geraden entsprechen, bilden ein quadratisches F^2-System erster Stufe, welches in einem F^2-Bündel liegt; im Allgemeinen sind acht von ihnen Kegelflächen, weil alle Kegelflächen zweiter Ordnung ein F^2-System achter Stufe vierten Grades bilden. Der Ort aller zweifachen Punkte (resp. Ebenen) des einen Raumes, welchen Kegelflächen zweiter Ordnung (oder Curven zweiter Classe) in dem anderen Raume entsprechen, ist demnach im Allgemeinen eine F^8 (resp. Φ^8).

Das quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe, dessen Flächen auf ihren entsprechenden F^2 ruhen (9.), enthält unendlich viele zweifache Punkte, von denen jeder auf der ihm entsprechenden F^2 liegt. Der geometrische Ort dieser Punkte ist im Allgemeinen eine F^4, deren Gleichung sich aus (E.) ergiebt, wenn $b_{ik} = a_{ik} = y_i y_k$ gesetzt wird. Ebenso enthält das quadratische F^2-System achter Stufe unendlich viele zweifache Ebenen, die im Allgemeinen eine Φ^4 umhüllen.

§. 3. Quadratische F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe achter Stufe.

11. Die reciproke Beziehung, welche durch die bilineare Gleichung (B.) zwischen den F^2-Systemen und den Φ^2-Geweben neunter Stufe der beiden Räume R_x und R_y hergestellt wird, soll eine *polare* genannt werden, wenn allgemein $l^{ik}_{mn} = l^{mn}_{ik}$ ist. In diesem Falle ändert (B.) sich nicht, wenn man die α_{ik} mit den resp. β_{ik} vertauscht; jeder F^2 entspricht, mag sie nun zu R_x oder zu R_y gerechnet werden, beidemal dieselbe Φ^2, und eine Unterscheidung der beiden Räume ist fernerhin unnöthig; die polare Beziehung ist zugleich eine involutorische.

Die Coordinaten γ_{ik} aller F^2, welche durch (B.) mit sich selbst verknüpft sind, genügen wegen $l^{ik}_{mn} = l^{mn}_{ik}$ der quadratischen Gleichung:

$$(B_1.) \quad \begin{cases} l^{11}_{11}\gamma_{11}\gamma_{11} + 4l^{11}_{12}\gamma_{11}\gamma_{12} + 4l^{12}_{12}\gamma_{12}\gamma_{12} + 2l^{11}_{22}\gamma_{11}\gamma_{22} + 4l^{12}_{22}\gamma_{12}\gamma_{22} + 8l^{12}_{13}\gamma_{12}\gamma_{13} + \cdots \\ \qquad \cdots + l^{44}_{44}\gamma_{44}\gamma_{44} = 0. \end{cases}$$

Dieselbe zählt 55 Coefficienten und repräsentirt ein ganz beliebiges quadratisches F^2-System achter Stufe, durch welches die polare Beziehung völlig bestimmt ist. Von zwei durch (B.) mit einander verknüpften F^2 wollen wir sagen, sie seien ***einander conjugirt in Bezug auf dieses quadratische F^2-System*** (B_1.), weil sie zu demselben in einer analogen Beziehung stehen, wie zwei Punkte zu einer Fläche zweiter Ordnung, in Bezug auf welche sie einander conjugirt sind. Dieses ist schon aus der Form der Gleichungen (B.) und (B_1.) ersichtlich, kann aber auch auf folgende Art nachgewiesen werden.

12. Sind α_{ik} und β_{ik} für i und $k=1, 2, 3, 4$ die Coordinaten von zwei F^2, etwa von F^2_α und F^2_β, so können diejenigen einer dritten, F^2_γ, welche mit jenen in einem F^2-Büschel liegt, auf die Form $\gamma_{ik}=\alpha_{ik}+\varkappa\beta_{ik}$ gebracht werden. Sollen diese γ_{ik} der Gleichung $(B_1.)$ genügen, so ergiebt sich für $\varkappa$ eine quadratische Gleichung; dieselbe nimmt die Form $M+\varkappa^2 N=0$ an, und hat zwei entgegengesetzte Wurzeln $\pm\varkappa_1$, wenn die α_{ik} und die β_{ik} der Gleichung $(B.)$ genügen. Durch die beiden F^2, deren Coordinaten $\alpha_{ik}+\varkappa_1\beta_{ik}$ und $\alpha_{ik}-\varkappa_1\beta_{ik}$ sind, werden aber F^2_α und F^2_β harmonisch getrennt; also:

Zwei durch die Gleichung $(B.)$ verknüpfte F^2 sind harmonisch getrennt durch diejenigen beiden Flächen des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe $(B_1.)$, welche mit ihnen in einem F^2-Büschel liegen.

Genügen die α_{ik} der Gleichung $(B_1.)$, so verschwindet M in der Gleichung $M+\varkappa^2 N=0$, und die Wurzeln $\pm\varkappa_1$ werden beide Null; der F^2-Büschel schneidet dann nicht das quadratische F^2-System $(B_1.)$ in zwei Flächen, sondern *berührt* dasselbe in F^2_α. Liegen endlich F^2_α und F^2_β beide in dem quadratischen F^2-Systeme, so enthält dieses alle F^2 des Büschels $(F^2_\alpha\ F^2_\beta)$; denn alsdann verschwindet sowohl N wie M, und $\varkappa$ wird ein willkürlicher Parameter.

13. Das lineare F^2-System achter Stufe, dessen Flächen in Bezug auf $(B_1.)$ einer gegebenen F^2_α conjugirt sind (11.), kann die ***Polare der F^2_α bezüglich des quadratischen F^2-Systemes $(B_1.)$*** genannt werden; mit demselben Namen aber wollen wir auch die Φ^2 bezeichnen, welche von den zweifachen Ebenen des linearen Systemes umhüllt wird und das letztere bestimmt. Liegt F^2_α in dem quadratischen F^2-Systeme, so wird dieses von dem linearen (d. h. von jedem durch F^2_α gehenden F^2-Büschel desselben (12.)) in F^2_α *berührt*, und F^2_α stützt ihre Polare Φ^2_α. Mit einem solchen tangirenden F^2-Systeme ersten Grades hat das quadratische F^2-System achter Stufe ein quadratisches F^2-System siebenter Stufe gemein, welches (12.) sechsfach unendlich viele reelle oder imaginäre F^2-Büschel enthält und durch einen F^2-Büschel beschrieben werden kann. Wenn das quadratische System achter Stufe ein durch F^2_α gehendes lineares F^2-System von acht oder weniger Dimensionen enthält, so liegt dieses auch in dem an F^2_α tangirenden linearen System. Von zwei beliebigen F^2 stützt entweder keine oder jede die Polare Φ^2 der anderen; der letztere Fall tritt ein, wenn die beiden F^2 einander conjugirt sind bezüglich des quadratischen F^2-Systemes.

14. Mit dem quadratischen F^2-Systeme achter Stufe ist dasjenige

quadratische Φ^2-Gewebe auf das Innigste verbunden, welches durch die Gleichung (E.) unter der Annahme $b_{ik} = a_{ik}$ repräsentirt wird. Denn die Gleichungen (B.) und (E.) repräsentiren, falls $\triangle$ nicht verschwindet (8.), dieselbe reciproke, und wenn $l^{ik}_{mn} = l^{mn}_{ik}$ ist, auch dieselbe polare Beziehung, sodass diese ebensowohl durch das quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe wie durch das quadratische F^2-System (B_1.) bestimmt ist.

Das quadratische Φ^2-Gewebe und das quadratische F^2-System achter Stufe stehen in einer analogen Beziehung zu einander, wie eine F^2 und die von ihren Berührungsebenen gebildete Φ^2. Ist Φ^2_α die Polare einer F^2_α in Bezug auf das quadratische F^2-System, so ist umgekehrt F^2_α die Polare von Φ^2_α in Bezug auf das quadratische Φ^2-Gewebe. Jede Φ^2 des letzteren ist die Polare einer sie stützenden F^2 des ersteren.

Auch jedem linearen F^2-System p^{ter} Stufe entspricht ein lineares Φ^2-Gewebe p^{ter} Stufe als Polare, und wenn das erstere dem quadratischen F^2-Systeme achter Stufe angehört, so liegt das letztere in dem quadratischen Φ^2-Gewebe achter Stufe.

15. Bestimmt man zehn F^2 so, dass jede derselben den neun übrigen bezüglich des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe conjugirt ist, so bilden dieselben das Analogon eines Poltetraëders des gewöhnlichen Polarsystemes. Gleichwie nämlich von einem Poltetraëder jeder Eckpunkt die Verbindungsebene der übrigen drei Eckpunkte zur Polare hat, ebenso hat jede der zehn conjugirten F^2 diejenige Φ^2 zur Polare, welche auf die übrigen neun F^2 sich stützt.

Die Gleichung des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe kann bekanntlich*) auf unendlich viele Arten auf die kanonische Form:

$$(B_2.) \qquad k_0 P_0^2 + k_1 P_1^2 + k_2 P_2^2 + \cdots + k_9 P_9^2 = 0$$

gebracht werden, worin die k_i reelle Constante und die P_i reelle, lineare, von einander unabhängige Functionen der F^2-Coordinaten bezeichnen; und zwar repräsentiren die Gleichungen $P_i = 0$ zehn lineare F^2-Systeme achter Stufe, von welchen ein jedes bezüglich des quadratischen Systemes die Polare derjenigen F^2 ist, welche die übrigen neun mit einander gemein haben. Von diesen zehn linearen Systemen ist das erste ganz beliebig annehmbar, das zweite kann beliebig durch die F^2 gelegt werden, welche

---

*) S. die Abhandlungen von *Jacobi*, *Hermite* und *Borchardt* in diesem Journal Bd 53, S. 270—283; vgl. *Gundelfinger* in *Hesses* analyt. Geometrie des Raumes, 3. Aufl. S. 449—461.

das erste zur Polare hat, und überhaupt kann das i^{te} beliebig durch diejenigen F^2 gelegt werden, von welchen die $i-1$ vorher angenommenen linearen F^2-Systeme achter Stufe die Polaren sind. Denn die zehn linearen F^2-Systeme schneiden sich zu neunen in zehn F^2, welche eine *ganz beliebige* Gruppe von zehn, bezüglich des quadratischen Systemes einander conjugirten F^2 bilden. — Wir übergehen den Beweis dieser nicht unwichtigen Bemerkungen, weil er einem auf quaternäre quadratische Formen bezüglichen Beweise*) nachgebildet werden kann. U. A. ergiebt sich bei diesem Beweise der Satz:

Von den zehn Constanten k_i der kanonischen Form (B_2.) *wird nur dann eine Null, wenn das quadratische F^2–System achter Stufe eine Doppel–F^2 enthält; die Discriminante $\triangle = \Sigma \pm l_{11}^{11} l_{12}^{12} l_{22}^{22} \ldots l_{44}^{44}$ seiner Gleichung* (B_1.) *verschwindet in diesem Falle* (8.). *Geht das quadratische F^2–System achter Stufe zweimal durch ein lineares F^2–System p^{ter} Stufe, so besteht seine kanonische Form* (B_2.) *aus nur* $9-p$ *Quadraten.*

16. Das quadratische F^2-System achter Stufe enthält entweder gar keine oder unendlich viele reelle lineare F^2-Systeme p^{ter} Stufe, wenn $0 < p < 8$ ist. Denn jedes der $8-p$-fach unendlich vielen linearen F^2-Systeme $p+1^{\text{ter}}$ Stufe, welche durch irgend ein solches lineares System p^{ter} Stufe gelegt werden können**), hat mit dem quadratischen Systeme noch ein lineares System p^{ter} Stufe gemein, und das quadratische System kann also durch ein lineares von p Dimensionen beschrieben werden. Ein solches lineares System liegt in allen den linearen F^2-Systemen achter Stufe, welche in seinen ∞^p verschiedenen Flächen das quadratische System berühren (13.).

Hiernach sind sechs Hauptarten des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe zu unterscheiden, nämlich:

1) ***Das imaginäre,*** dessen Gleichung durch keine reellen Werthe der F^2-Coordinaten befriedigt wird.

2) ***Das elliptische,*** dessen F^2-Büschel sämmtlich imaginär sind. Dasselbe hat mit jedem tangirenden F^2-Systeme ersten Grades eine einzige F^2 gemein, deren Coordinaten reell sind, die aber nicht selbst reell zu sein braucht.

---

*) S. meine Arbeit „über Trägheits- und höhere Momente“ in diesem Journal Bd. 72, S. 309—313.

**) Vgl. diesen Band, S. 12.

3) ***Das einfach gerade****), welches ∞^{12} reelle F^2-Büschel, aber keine reellen F^2-Bündel enthält. Jede F^2 desselben liegt in ∞^6 von seinen F^2-Büscheln.

4) ***Das zweifach gerade,*** welches unendlich viele reelle F^2-Bündel, aber keine reellen F^2-Gebüsche enthält.

5) und 6) ***Das dreifach und das vierfach gerade,*** von denen z. B. das letztere unendlich viele reelle F^2-Systeme ersten Grades von vier, aber keine von fünf Dimensionen enthält.

17. Man überzeugt sich leicht, dass diese sechs Hauptarten wirklich existiren. Nämlich die Gleichung (B_2.), $\sum_{i=0}^{i=9} k_i P_i^2 = 0$, repräsentirt ein ***imaginäres*** F^2-System achter Stufe, wenn die zehn Constanten k_i alle positiv sind; ein ***elliptisches,*** wenn nur eine derselben negativ ist; ein ***einfach gerades,*** wenn zwei von den k_i negativ und die übrigen acht positiv sind; u. s. w.; endlich ein ***vierfach gerades,*** wenn fünf k_i negativ und die übrigen fünf positiv sind.

Sind alle $k_i > 0$, so müssen alle reellen F^2-Coordinaten, welche der Gleichung (B_2.) genügen, auch die zehn Gleichungen $P_i = 0$ befriedigen; da aber diese linearen Gleichungen von einander unabhängig sind (15.), so giebt es keine von Null verschiedenen reellen Werthe der F^2-Coordinaten, welche ihnen genügen. — In den übrigen Fällen bringen wir (B_2.) auf die Form:

$$P_0^2 + P_1^2 + \cdots + P_{n-1}^2 = P_n^2 + P_{n+1}^2 + \cdots + P_9^2, \quad \text{worin} \quad n \leqq 5,$$

indem wir, ohne dadurch die Allgemeinheit der Gleichung zu beeinträchtigen, $k_i^2 = 1$ annehmen dürfen. Das quadratische F^2-System achter Stufe, welches durch diese Gleichung repräsentirt wird, enthält unendlich viele lineare F^2-Systeme $n-1^{\text{ter}}$ Stufe, wie oben behauptet wurde, nämlich u. A. dasjenige, welches dargestellt wird durch die $10-n$ linearen Gleichungen:

$$P_0 = P_n, \quad P_1 = P_{n+1}, \ \ldots, \ P_{n-1} = P_{2n-1}, \quad P_{2n} = 0, \quad P_{2n+1} = 0, \ \ldots, \ P_9 = 0;$$

wir brauchen deshalb nur noch zu beweisen, dass es kein lineares F^2-System n^{ter} Stufe enthält.

18. Seien $P_{i0}, P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{in}$ die Werthe, welche die lineare Function P_i annimmt, wenn man in sie der Reihe nach die reellen Coordinaten von $n+1$ Flächen zweiter Ordnung $F_0^2, F_1^2, F_2^2, \ldots, F_n^2$ einsetzt. Wenn alle diese F^2 in einem dem quadratischen Systeme angehörigen linearen F^2-Systeme liegen, so sind sie sich selbst und einander bezüglich des qua-

*) Ich wähle diese Bezeichnung, um an die Analogie mit den *geradlinigen* Flächen zu erinnern.

dratischen Systemes conjugirt, und umgekehrt; wir erhalten in diesem Falle für die P_{ik} die $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen:

$$(Q_{kl} \equiv)\ P_{0k}P_{0l}+P_{1k}P_{1l}+\cdots+P_{n-1,k}P_{n-1,l} = P_{nk}P_{nl}+P_{n+1,k}P_{n+1,l}+\cdots+P_{9k}P_{9l},$$

worin k sowohl wie l die Werthe 0, 1, 2, ..., n annehmen kann. Bezeichnen wir mit Q_{kl} die linken Seiten dieser Gleichungen, so verschwindet die Determinante $\Sigma \pm Q_{00} Q_{11} Q_{22} \ldots Q_{nn}$; dieselbe lässt sich aber, wenn für die Q_{kl} ihre Werthe rechts eingesetzt werden, nach dem Multiplicationstheorem in eine Summe von Quadraten zerlegen von der Form:

$$\begin{vmatrix} P_{q0} & P_{r0} & \ldots & P_{s0} \\ P_{q1} & P_{r1} & \ldots & P_{s1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{qn} & P_{rn} & \ldots & P_{sn} \end{vmatrix}^2,$$

worin $q, r, \ldots, s$ beliebige $n+1$ von den Zahlen $n, n+1, n+2, \ldots, 9$ bezeichnen. Es verschwindet folglich jede aus $n+1$ Colonnen der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} P_{n,0} & P_{n+1,0} & \ldots & P_{9,0} \\ P_{n,1} & P_{n+1,1} & \ldots & P_{9,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n,n} & P_{n+1,n} & \ldots & P_{9,n} \end{matrix} \right\|$$

gebildete Determinante. Hieraus folgert man leicht, indem man in den obigen $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Gleichungen einzelne Glieder von der linken auf die rechte Seite bringt und dann mit den Gleichungen wie soeben verfährt, dass überhaupt alle aus $n+1$ Colonnen der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} P_{0,0} & P_{1,0} & P_{2,0} & \ldots & P_{9,0} \\ P_{0,1} & P_{1,1} & P_{2,1} & \ldots & P_{9,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{0,n} & P_{1,n} & P_{2,n} & \ldots & P_{9,n} \end{matrix} \right\|$$

gebildeten Determinanten verschwinden. Dieses geschieht aber unter den gemachten Voraussetzungen nur dann, wenn die $n+1$ Flächen F_0^2, F_1^2, F_2^2, ..., F_n^2 linear von einander abhängig sind, sodass ihre gleichnamigen Coordinaten $(\alpha_{ik})_s$ einer Gleichung von der Form $\sum_{s=0}^{s=n} l_s (\alpha_{ik})_s = 0$ genügen; und somit ist der Beweis geführt, dass die $n+1$ Flächen ein dem quadratischen F^2-System achter Stufe angehöriges lineares F^2-System von weniger als n, nämlich von höchstens $n-1$ Dimensionen bestimmen.

19. Die Gleichung des $n-1$-fach geraden quadratischen F^2-Systemes achter Stufe lässt sich für $n \leqq 5$ nicht nur auf unendlich viele Arten auf die kanonische Form:

$$P_0^2+P_1^2+\cdots+P_{n-1}^2 = P_n^2+P_{n+1}^2+\cdots+P_9^2$$

bringen, sondern auch, indem $P_{n+i}+P_i = Q_{n+i}$ und $P_{n+i}-P_i = R_{n+i}$ gesetzt wird, auf die Form:

$$0 = Q_n R_n + Q_{n+1}R_{n+1}+\cdots+Q_{2n-1}R_{2n-1}+P_{2n}^2+P_{2n+1}^2+\cdots+P_9^2$$

oder auf die allgemeinere Form:

$$0 = Q_n R_n + Q_{n+1}R_{n+1}+\cdots+Q_8 R_8+Q_9 R_9,$$

in welcher die Q_i und die R_i lineare homogene Functionen der F^2-Coordinaten bezeichnen. Setzt man von diesen Functionen irgend $10-n$, von denen keine zwei denselben Index haben, gleich Null, so erhält man die Gleichungen eines linearen F^2-Systemes $n-1^{\text{ter}}$ Stufe, welches in dem quadratischen Systeme enthalten ist.

Diese letzte Bemerkung gilt auch für die Fälle, in welchen $n = 6$, 7 oder 8 ist, und es giebt demnach auch fünf-, sechs- und siebenfach gerade quadratische F^2-Systeme achter Stufe. Ich habe diese Arten in der obigen Eintheilung der quadratischen F^2-Systeme nur deshalb nicht genannt, weil sie nur bei speciellen Systemen auftreten können. Z. B. das fünffach gerade quadratische System:

$$Q_6 R_6+Q_7 R_7+Q_8 R_8+Q_9 R_9 = 0$$

ist ein specielles, weil es den F^2-Büschel, welcher durch die acht linearen Gleichungen:

$$Q_6 = 0,\quad R_6 = 0,\quad Q_7 = 0,\quad R_7 = 0,\quad Q_8 = 0,\quad R_8 = 0,\quad Q_9 = 0,\quad R_9 = 0$$

repräsentirt wird, doppelt enthält.

Ein quadratisches F^2-System achter Stufe und das mit ihm verbundene quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe (14.) sind allemal von gleicher Art, d. h. entweder beide imaginär oder beide elliptisch oder beide n-fach gerade; denn jedem linearen F^2-Systeme n^{ter} Stufe des ersteren ist ein lineares Φ^2-Gewebe n^{ter} Stufe des letzteren als Polare zugeordnet. Die kanonischen Formen der beiden quadratischen Flächenmannigfaltigkeiten enthalten folglich, wenn ihr Vorzeichen entsprechend gewählt wird, gleich viel negative Quadrate und gleich viel positive, falls der Voraussetzung (8.) gemäss die Determinante Δ von Null verschieden ist.



20. Für diese Determinante $\triangle = \Sigma \pm l_{11}^{11} l_{12}^{12} l_{22}^{22} \ldots l_{44}^{44}$, welche für $l_{mn}^{ik} = l_{ik}^{mn}$ als die Discriminante der Gleichung:

$$(B_1.)\quad l_{11}^{11}\gamma_{11}\gamma_{11} + 4l_{12}^{11}\gamma_{11}\gamma_{12} + 4l_{12}^{12}\gamma_{12}\gamma_{12} + 2l_{22}^{11}\gamma_{11}\gamma_{22} + 8l_{13}^{12}\gamma_{12}\gamma_{13} + \cdots + l_{44}^{44}\gamma_{44}\gamma_{44} = 0$$

des quadratischen F^2-Systemes aufgefasst werden kann, erhalten wir einen bemerkenswerthen Ausdruck, wenn wir $(B_1.)$ auf die kanonische Form:

$$(B_2.)\quad k_0 P_0^2 + k_1 P_1^2 + k_2 P_2^2 + \cdots + k_9 P_9^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{j=0}^{j=9} k_j P_j^2 = 0$$

bringen. Setzen wir:

$$P_j = \mathfrak{t}_j^{11}\gamma_{11} + 2\mathfrak{t}_j^{12}\gamma_{12} + \mathfrak{t}_j^{22}\gamma_{22} + 2\mathfrak{t}_j^{13}\gamma_{13} + \cdots + \mathfrak{t}_j^{44}\gamma_{44},$$

so erhalten wir durch Identificirung der Gleichungen $(B_1.)$ und $(B_2.)$ die Werthe:

$$l_{mn}^{ik} = l_{ik}^{mn} = \sum_{j=0}^{j=9} k_j \mathfrak{t}_j^{ik} \mathfrak{t}_j^{mn}$$

für die Constanten l_{mn}^{ik}. Nach der Multiplicationsregel wird dadurch:

$$\triangle = k_0 k_1 k_2 \ldots k_9 . T . T, \quad \text{wenn} \quad T = \begin{vmatrix} \mathfrak{t}_0^{11} & \mathfrak{t}_1^{11} & \mathfrak{t}_2^{11} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{11} \\ \mathfrak{t}_0^{12} & \mathfrak{t}_1^{12} & \mathfrak{t}_2^{12} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{12} \\ \mathfrak{t}_0^{22} & \mathfrak{t}_1^{22} & \mathfrak{t}_2^{22} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{t}_0^{44} & \mathfrak{t}_1^{44} & \mathfrak{t}_2^{44} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{44} \end{vmatrix};$$

denn bildet man das Product der Determinanten T und T, nachdem man die zehn Colonnen der einen mit resp. $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_9$ multiplicirt hat, so erhält man die Determinante $\Sigma \pm l_{11}^{11} l_{12}^{12} l_{22}^{22} \ldots l_{44}^{44}$.

Besteht die kanonische Form $(B_2.)$ nur aus neun Quadraten, ist etwa $k_0 = 0$, so verschwindet die Discriminante $\triangle$ (vergl. 15.), und in diesem Falle können ihre ersten Minoren λ_{mn}^{ik} als Producte von $k_1 k_2 \ldots k_9$ und je zwei neunzeiligen Determinanten dargestellt werden, indem

$$\lambda_{mn}^{ik} = \lambda_{ik}^{mn} = k_1 k_2 \ldots k_9 \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{t}_0^{ik}} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathfrak{t}_0^{mn}}$$

wird. Besteht $(B_2.)$ aus nur acht Quadraten, so verschwinden folglich alle diese ersten Minoren, und man kann alsdann alle *zweiten* Minoren von $\triangle$ auf ähnliche Art als Producte darstellen; u. s. w. Daraus und aus (15.) folgt:

Geht das quadratische F^2-System achter Stufe zweimal durch ein lineares F^2-System p^{ter} Stufe, so verschwinden alle p^{ten} Minoren der Discriminante $\triangle$.

21. Wir wollen mit Q die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{34} & a_{44} \\ a_{11} & l_{11}^{11} & l_{12}^{11} & l_{22}^{11} & \ldots & l_{34}^{11} & l_{44}^{11} \\ a_{12} & l_{11}^{12} & l_{12}^{12} & l_{22}^{12} & \ldots & l_{34}^{12} & l_{44}^{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{44} & l_{11}^{44} & l_{12}^{44} & l_{22}^{44} & \ldots & l_{34}^{44} & l_{44}^{44} \end{vmatrix} = Q$$

bezeichnen, sodass die Gleichung $Q=0$ das mit dem quadratischen F^2-Systeme verbundene quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe darstellt (14.). Diese Determinante ist identisch Null, wenn alle ersten Minoren der Discriminante Δ verschwinden; also:

Wenn das quadratische F^2-System achter Stufe einen F^2-Büschel doppelt enthält, so wird das mit ihm verbundene quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe unbestimmt.

Besteht die kanonische Form (B_2.) aus nur neun Quadraten, sodass das quadratische F^2-System durch die Gleichung:

$$k_1 P_1^2 + k_2 P_2^2 + \cdots + k_9 P_9^2 = 0$$

dargestellt wird, so repräsentiren die neun linearen Gleichungen:

$P_j = 0$ oder $\mathfrak{t}_j^{11}\gamma_{11} + 2\mathfrak{t}_j^{12}\gamma_{12} + \mathfrak{t}_j^{22}\gamma_{22} + \cdots + \mathfrak{t}_j^{44}\gamma_{44} = 0$ für $j = 1, 2, 3, \ldots, 9$

die Doppel-F^2 des quadratischen Systemes. Die Determinante Q lässt sich aber in diesem Falle, weil $l_{mn}^{ik} = l_{ik}^{mn} = \sum_{j=1}^{j=9} k_j \mathfrak{t}_j^{ik} \mathfrak{t}_j^{mn}$ wird, darstellen als Product der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{11} & \mathfrak{t}_1^{11} & \mathfrak{t}_2^{11} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{11} \\ 0 & a_{12} & \mathfrak{t}_1^{12} & \mathfrak{t}_2^{12} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{12} \\ 0 & a_{22} & \mathfrak{t}_1^{22} & \mathfrak{t}_2^{22} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{44} & \mathfrak{t}_1^{44} & \mathfrak{t}_2^{44} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{44} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{11} & 0 & k_1\mathfrak{t}_1^{11} & k_2\mathfrak{t}_2^{11} & \ldots & k_9\mathfrak{t}_9^{11} \\ a_{12} & 0 & k_1\mathfrak{t}_1^{12} & k_2\mathfrak{t}_2^{12} & \ldots & k_9\mathfrak{t}_9^{12} \\ a_{22} & 0 & k_1\mathfrak{t}_1^{22} & k_2\mathfrak{t}_2^{22} & \ldots & k_9\mathfrak{t}_9^{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{44} & 0 & k_1\mathfrak{t}_1^{44} & k_2\mathfrak{t}_2^{44} & \ldots & k_9\mathfrak{t}_9^{44} \end{vmatrix},$$

sodass sich ergiebt:

$$Q = -k_1 k_2 k_3 \ldots k_9 . \begin{vmatrix} a_{11} & \mathfrak{t}_1^{11} & \mathfrak{t}_2^{11} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{11} \\ a_{12} & \mathfrak{t}_1^{12} & \mathfrak{t}_2^{12} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{12} \\ a_{22} & \mathfrak{t}_1^{22} & \mathfrak{t}_2^{22} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{44} & \mathfrak{t}_1^{44} & \mathfrak{t}_2^{44} & \ldots & \mathfrak{t}_9^{44} \end{vmatrix}^2 .$$

Die Gleichung $Q=0$ repräsentirt also ein zweimal zu zählendes lineares Φ^2-Gewebe achter Stufe; dasselbe stützt sich auf die Doppel-F^2 des quadratischen F^2-Systemes, weil von seinen Flächen die neun, deren Coordinaten die Werthe:

$a_{11} = \mathfrak{t}_j^{11}$, $a_{12} = \mathfrak{t}_j^{12}$, $\ldots$, $a_{ik} = \mathfrak{t}_j^{ik}$, $\ldots$, $a_{44} = \mathfrak{t}_j^{44}$ für $j = 1, 2, 3, \ldots, 9$

haben, dem Obigen zufolge auf dieser Doppel-F^2 ruhen. Also:

Wenn das quadratische F^2-System achter Stufe eine Doppel-F^2 enthält, so reducirt sich das mit ihm verbundene quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe auf das zweifache lineare Φ^2-Gewebe achter Stufe, welches auf der Doppel-F^2 ruht.

Tritt dieser besondere Fall nicht ein, ist also $\triangle$ von Null verschieden, so bestimmen das quadratische F^2-System und das quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe sich wechselseitig (14.).

22. Ein quadratisches F^n-System $(p-1)^{\text{ter}}$ Stufe ist bestimmt durch eine quadratische und $N(n)-p$ lineare Gleichungen zwischen den $N(n)+1$ F^n-Coordinaten. Eliminirt man irgend $N(n)-p$ dieser Coordinaten mittelst der linearen Gleichungen aus der quadratischen, so enthält die letztere höchstens noch $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ Coefficienten. Daraus schliessen wir:

Durch $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)-1=\frac{1}{2}p(p+3)$ beliebige Flächen eines linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe kann im Allgemeinen ein quadratisches F^n-System $(p-1)^{\text{ter}}$ Stufe gelegt werden. Ein quadratisches F^n-System q^{ter} Stufe geht (für $q\geqq p$) durch alle Flächen eines linearen F^n-Systemes p^{ter} Stufe, wenn es $\frac{1}{2}(p+1)(p+2)$ beliebige Flächen desselben enthält.

Demnach ist ein quadratisches F^2-System achter Stufe im Allgemeinen bestimmt, wenn von ihm gegeben sind: 54 F^2, oder achtzehn F^2-Büschel, oder neun F^2-Bündel, oder fünf F^2-Gebüsche nebst vier einzelnen F^2, oder drei lineare F^2-Systeme vierter Stufe nebst neun F^2, oder drei lineare F^2-Systeme fünfter Stufe. Zwei lineare F^2-Systeme sechster oder siebenter Stufe können mit acht resp. drei beliebigen F^2 durch ein quadratisches F^2-System achter Stufe verbunden werden.

23. Das quadratische F^2-System achter Stufe enthält im Allgemeinen fünffach unendlich viele Ebenenpaare ξ, ξ' (10.); die Ebenen eines jeden derselben sind einander conjugirt bezüglich der Polare des Paares. Die Bedingungsgleichung für die Ebenencoordinaten ξ_i und ξ'_i dieser Paare ergiebt sich aus $(B_1.)$, wenn man $2\gamma_{ik}=\xi_i\xi'_k+\xi_k\xi'_i$ setzt. Dieselbe ist quadratisch für die ξ_i und die ξ'_i, und ändert sich nicht, wenn man ξ mit ξ' vertauscht. Die Beziehung zwischen den Ebenen ξ und ξ' der ∞^5 Paare ist also eine quadratische und involutorische (10.).

Dasselbe gilt, weil $l^{ik}_{mn}=l^{mn}_{ik}$ ist, von den zweifachen Ebenen, welche durch die Gleichung $(B.)$ mit einander verknüpft, oder was Dasselbe ist, bezüglich des quadratischen F^2-Systemes $(B_1.)$ einander conjugirt sind. Die Bedingungsgleichung für die Coordinaten ξ_i und η_i von zwei beliebigen

derselben erhält man aus ($B.$), wenn man $\alpha_{ik} = \xi_i \xi_k$ und $\beta_{ik} = \eta_i \eta_k$ setzt. Die quadratische und involutorische Beziehung der Ebenen ξ und η ist aber im Allgemeinen verschieden von derjenigen der Ebenen ξ und ξ' eines sich selbst conjugirten Paares. Fallen ξ und ξ' zusammen, so ist die *zweifache* Ebene ξ sich selbst conjugirt und identisch mit einer η; sie ist dann nicht mehr eine beliebige zweifache Ebene des Raumes, sondern eine zweifache Ebene des quadratischen F^2-Systemes ($B_1.$).

24. Die zweifachen Ebenen des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe ($B_1.$) umhüllen im Allgemeinen eine Fläche vierter Classe (10.), deren Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} l_{11}^{11}\xi_1^4 + 4l_{12}^{11}\xi_1^3\xi_2 + 2(l_{22}^{11} + 2l_{12}^{12})\xi_1^2\xi_2^2 + 4l_{13}^{11}\xi_1^3\xi_3 + 4(l_{23}^{11} + 2l_{13}^{12})\xi_1^2\xi_2\xi_3 \\ \quad + \cdots + 8(l_{34}^{12} + l_{24}^{13} + l_{23}^{14})\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 + 4(l_{34}^{22} + 2l_{24}^{23})\xi_2^2\xi_3\xi_4 + \cdots + l_{44}^{44}\xi_4^4 \end{array}\right\} = 0$$

nur 35 Coefficienten zählt, also zwanzig weniger als ($B_1.$). Das quadratische F^2-System ist demnach durch diese zugehörige Φ^4 im Allgemeinen nicht bestimmt; dagegen reichen 54 beliebige von seinen Ebenenpaaren ξ, ξ' aus zu seiner Bestimmung. — Die zweifachen Punkte des zugehörigen quadratischen Φ^2-Gewebes achter Stufe liegen im Allgemeinen auf einer F^4, die für sich allein zur Bestimmung der beiden quadratischen Flächenmannigfaltigkeiten allerdings so wenig wie Φ^4 ausreicht, aber zu ihnen und zu Φ^4 merkwürdige Beziehungen hat. Eine zweifache Ebene berührt nur dann ihre Polare Φ^2 bezüglich des quadratischen F^2-Systemes, wenn sie die Fläche Φ^4 berührt; und ein zweifacher Punkt liegt nur dann auf seiner Polare bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes, wenn er auf F^4 liegt, denn nur in diesem Falle ist er sich selbst conjugirt.

In nahem Zusammenhange mit den beiden Flächen-Mannigfaltigkeiten stehen ausserdem eine Φ^8 und eine F^8; letztere ist der Ort aller zweifachen Punkte, welche bezüglich des quadratischen F^2-Systemes die Polaren von Kegelflächen zweiter Ordnung sind (vgl. 10.), Φ^8 dagegen wird von allen zweifachen Ebenen eingehüllt, deren Polaren sich auf Curven zweiter Classe reduciren.

25. Die Fläche Φ^4 wird unbestimmt (24.) und jede beliebige Ebene ist zweifache Ebene des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe, wenn die 55 Constanten $l_{mn}^{ik} = l_{ik}^{mn}$ folgenden 35 Bedingungsgleichungen genügen:

$$l_{11}^{11} = 0, \quad l_{12}^{11} = 0, \quad l_{22}^{11} + 2l_{12}^{12} = 0, \; \ldots, \; l_{mn}^{ik} + l_{kn}^{im} + l_{km}^{in} = 0, \; \ldots, \; l_{44}^{44} = 0.$$

Die Gleichung ($B_1.$) des quadratischen F^2-Systemes nimmt dann die Form an:

$$\begin{array}{l} l_{12}^{12}(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{12}) + 2l_{13}^{12}(\gamma_{11}\gamma_{23} - \gamma_{12}\gamma_{13}) + \cdots \\ \qquad \cdots + 2l_{34}^{12}(\gamma_{13}\gamma_{24} - \gamma_{12}\gamma_{34}) + \cdots + l_{34}^{34}(\gamma_{33}\gamma_{44} - \gamma_{34}\gamma_{34}) = 0, \end{array}$$

und ihre linke Seite wird eine lineare Function von den zwanzig quadratischen Minoren $(\gamma_{ik}\gamma_{mn}-\gamma_{im}\gamma_{kn})$ der symmetrischen Determinante $\Sigma\pm\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}\gamma_{44}$. Zugleich geht die Gleichung (*B.*) in (6.), durch welche je zwei conjugirte F^2 mit einander verknüpft sind, über in:

$$\left.\begin{array}{r} l_{12}^{12}(\alpha_{11}\beta_{22}-2\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{11})+2l_{13}^{12}(\alpha_{11}\beta_{23}-\alpha_{12}\beta_{13}+\alpha_{23}\beta_{11}-\alpha_{13}\beta_{12})+\cdots \\ \cdots+2l_{34}^{12}(\alpha_{13}\beta_{24}-\alpha_{12}\beta_{34}+\alpha_{24}\beta_{13}-\alpha_{34}\beta_{12})+\cdots+l_{34}^{34}(\alpha_{33}\beta_{44}-2\alpha_{34}\beta_{34}+\alpha_{44}\beta_{33}) \end{array}\right\} = 0.$$

Um hieraus die Gleichung der Polare Φ^2 irgend einer zweifachen Ebene ξ zu erhalten, haben wir allgemein $\alpha_{ik}=\xi_i\xi_k$ und $\beta_{ik}=\eta_i\eta_k$ zu setzen; es ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{r} l_{12}^{12}(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^2+2l_{13}^{12}(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)(\xi_1\eta_3-\eta_1\xi_3)+l_{13}^{13}(\xi_1\eta_3-\eta_1\xi_3)^2+\cdots \\ \cdots+2l_{34}^{12}(\xi_1\eta_4-\eta_1\xi_4)(\xi_3\eta_2-\eta_3\xi_2)+\cdots+l_{34}^{34}(\xi_3\eta_4-\eta_3\xi_4)^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Für $\eta_i=\xi_i$ werden in jedem Gliede dieser Gleichung zwei Factoren Null, d. h. die zweifache Ebene ξ ist Doppelebene ihrer Polare Φ^2, und Φ^2 reducirt sich auf eine in ξ liegende Curve zweiter Classe; auch die Fläche Φ^8 (24.) wird sonach unbestimmt. Die Tangenten der Curve zweiter Classe beschreiben, wenn ξ sich bewegt, einen ***Strahlencomplex zweiten Grades,*** in dessen Strahlen sich unendlich viele Paare von conjugirten zweifachen Ebenen ξ, η schneiden; denn die Gleichung der Curve enthält nur die Quadrate und Producte der sechs Liniencoordinaten $\xi_i\eta_k-\eta_i\xi_k$. Ist dieser Strahlencomplex zweiten Grades beliebig gegeben, so ist auch das quadratische F^2-System achter Stufe bestimmt, weil dann die Verhältnisse der zwanzig Coefficienten l_{mn}^{ik} bekannt sind.

26. Die Gleichung des Strahlencomplexes ergiebt sich direct aus der obigen Gleichung des speciellen quadratischen F^2-Systemes, wenn man darin $2\gamma_{ik}=\xi_i\eta_k+\eta_i\xi_k$ setzt; sie ist also auch die Bedingung dafür, dass ξ und η ein Ebenenpaar des quadratischen F^2-Systemes achter Stufe bilden. Also:

Wenn ein quadratisches F^2-System achter Stufe alle zweifachen Ebenen des Raumes enthält, so bilden die Doppellinien aller seiner Ebenenpaare einen Strahlencomplex zweiten Grades. Die ebenen Complexcurven sind die Polaren ihrer Doppel-Ebenen und folglich singuläre Flächen des zugehörigen quadratischen Φ^2-Gewebes achter

Wenn ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe alle zweifachen Punkte des Raumes enthält, so bilden die Doppellinien aller seiner Punktenpaare einen Strahlencomplex zweiten Grades. Die Complexkegel sind die Polaren ihrer Doppelpunkte und folglich singuläre Flächen des zugehörigen quadratischen F^2-Systemes achter

Stufe, und dieses sowie das quadratische F^2-System sind durch den Strahlencomplex völlig bestimmt.

Stufe, und dieses sowie das quadratische Φ^2-Gewebe sind durch den Strahlencomplex völlig bestimmt.

Ein beliebiger Strahlencomplex zweiten Grades bestimmt demnach zwei quadratische F^2-Systeme achter Stufe nebst den zugehörigen beiden quadratischen Φ^2-Geweben achter Stufe. Dieselben sind im Allgemeinen durchaus nicht identisch; denn die zweifachen Ebenen des einen quadratischen F^2-Systemes (links) erfüllen den ganzen unendlichen Raum, während diejenigen des anderen (rechts) eine Fläche vierter Classe umhüllen. Dass umgekehrt die zweifachen Punkte des einen quadratischen Φ^2-Gewebes (links) nicht wie diejenigen des anderen (rechts) den ganzen Raum erfüllen, lässt sich wie folgt beweisen.

27. Diejenige F^2, welche in Bezug auf das quadratische F^2-System (links) eine beliebig angenommene Φ^2 zur Polare hat, stützt u. A. alle in den Berührungsebenen von Φ^2 liegenden Complexcurven (13.), weil sie diesen Ebenen conjugirt ist. Reducirt sich Φ^2 auf einen zweifachen Punkt P, so liegt derselbe nur dann auf F^2, wenn er ein zweifacher Punkt des zugehörigen quadratischen Φ^2-Gewebes ist. Wäre nun dieses allgemein für jede Lage von P der Fall, so müsste zufolge des Satzes rechts (26.) die F^2 eine Kegelfläche mit dem Doppelpunkte P sein, und je zwei Strahlen dieser Fläche müssten einander conjugirt sein bezüglich der in ihrer Ebene liegenden Complexcurve, weil F^2 diese Curve stützt. Dass Solches nur möglich ist, wenn F^2 und der Complexkegel P aus je zwei zugeordneten Ebenen eines harmonischen Ebenenbüschels bestehen, leuchtet sofort ein.

Ohne hier auf die Theorie des Strahlencomplexes zweiten Grades weiter einzugehen, heben wir nur noch den beiläufig gewonnenen Satz hervor:

Mit einem Strahlencomplex zweiten Grades sind eine F^4 und eine Φ^4 innig verbunden; diese Flächen sind die Orte der zweifachen Punkte resp. Ebenen eines Φ^2-Gewebes und eines F^2-Systemes achter Stufe zweiten Grades, welche durch den Complex bestimmt sind.

Mit dem von *Plücker* *) gefundenen Orte der singulären Punkte und Ebenen des Complexes scheinen diese beiden Flächen nicht identisch zu sein.

28. Sind $V=0$ und $W=0$ die Gleichungen von zwei beliebigen

---

*) *Plücker,* Neue Geometrie des Raumes ..., Lpz. 1868/9, S. 310 und 315.

quadratischen F^2-Systemen achter Stufe, so repräsentirt die Gleichung:

$$V+\lambda W=0$$

eine unendliche Schaar solcher F^2-Systeme, wenn λ einen willkürlichen Parameter bezeichnet. Alle diese Systeme haben das biquadratische F^2-System siebenter Stufe $V=W=0$ mit einander gemein, und durch jede nicht gemeinschaftliche F^2 des Raumes geht eines derselben. Die Orte ihrer zweifachen Ebenen bilden im Allgemeinen eine Φ^4-Schaar; die Polaren von zwei beliebigen F^2 bezüglich jener quadratischen F^2-Systeme bilden zwei projectivische Φ^2-Schaaren, weil ihre Gleichungen ebenso wie diejenige der Φ^4 hinsichtlich des Parameters λ linear sind.

Wenn irgend zwei der quadratischen F^2-Systeme alle ihre zweifachen Ebenen mit einander gemein haben, so reducirt sich die Φ^4-Schaar auf eine einzige Φ^4, und diese gehört allen F^2-Systemen zugleich an. Man kann aber in diesem Falle den Parameter λ so bestimmen, dass das System $V+\lambda W=0$ noch irgend eine zweifache Ebene enthält, welche Φ^4 *nicht* berührt; dann geht dieses F^2-System durch *alle* zweifachen Ebenen des Raumes (24., 25.) und ist durch einen Strahlencomplex zweiten Grades bestimmt (26.). Da nun jede zweifache Ebene bezüglich dieses speciellen Systemes die in ihr liegende Complexcurve zur Polare hat, so ergiebt sich:

29. Wenn die zweifachen Ebenen von zwei quadratischen F^2-Systemen achter Stufe eine und dieselbe Φ^4 umhüllen, so sind die Polaren jeder beliebigen zweifachen Ebene ε bezüglich dieser Systeme einem Ebenenbüschel vierter Ordnung eingeschrieben, dessen Ebenen sich paarweise auf ε in Strahlen eines durch die Systeme bestimmten Strahlencomplexes zweiten Grades schneiden.

Wenn die zweifachen Punkte von zwei quadratischen Φ^2-Geweben achter Stufe auf einer und derselben F^4 liegen, so durchdringen sich die Polaren jedes beliebigen zweifachen Punktes P bezüglich dieser Gewebe in einer Raumcurve $C^{2.2}$ vierter Ordnung, deren Punkte paarweise mit P in Strahlen eines durch die Gewebe bestimmten Strahlencomplexes zweiten Grades liegen.

Die Raumcurve $C^{2.2}$ (rechts) ist also die gemeinschaftliche Durchdringungscurve der beiden Polaren von P und einer Kegelfläche zweiten Grades, welche P zum Doppelpunkt hat. Wird P auf F^4 angenommen, so liegt P zugleich auf den beiden Polaren (24.), und ist folglich Doppelpunkt von $C^{2.2}$; die beiden Polaren von P berühren sich alsdann in P. Nun wird aber in der nächsten Nr. (30.) gezeigt, dass die Polarentheorie der F^4 zu

einem speciellen quadratischen Φ^2-Gewebe achter Stufe führt, wenn man jeder Φ^2 ihre Polare bezüglich der F^4 zuordnet. Und da bekanntlich die Fläche F^4 von der zweiten Polare eines auf ihr liegenden Punktes P in diesem Punkte berührt wird, so können wir den letzten Doppelsatz vervollständigen wie folgt:

Wird Φ^4 von der Ebene ε berührt, so tangiren die beiden Polaren von ε einander und Φ^4 in dem Berührungspunkte von ε.

Liegt der Punkt P auf F^4, so berühren seine beiden Polaren einander und die F^4 in P.

Die zweifachen Ebenen eines quadratischen F^2-Systemes achter Stufe und ihre Polaren bezüglich dieses Systemes hüllen also eine und dieselbe Fläche Φ^4 vierter Classe ein.

§. 4. Zur Theorie der Flächen vierter Classe oder vierter Ordnung.

30. Das quadratische F^2-System achter Stufe ist ein specielles, durch eine beliebige Φ^4 bestimmtes, wenn die 55 Coefficienten $l^{ik}_{mn} = l^{mn}_{ik}$ seiner Gleichung (B_1.) folgendermassen von den 35 Coordinaten a_{qrst} der Φ^4 abhängen:

$$l^{11}_{11} = a_{4000},\quad l^{11}_{12} = a_{3100},\quad l^{11}_{22} = l^{12}_{12} = a_{2200},\quad l^{11}_{13} = a_{3010},\quad l^{11}_{23} = l^{12}_{13} = a_{2110},$$
$$\ldots,\quad l^{12}_{34} = l^{13}_{24} = l^{14}_{23} = a_{1111},\quad l^{22}_{34} = l^{23}_{24} = a_{0211},\quad \ldots,\quad l^{44}_{44} = a_{0004}.$$

Nämlich in diesem Falle ist durch die bilineare Gleichung (B.) in (6.) oder auch durch die Substitution (D.) in (7.) einer jeden F^2 ihre Polare in Bezug auf Φ^4 zugeordnet, und alle F^2, welche diese ihre Polare stützen, bilden das quadratische F^2-System. Werden die Gleichungen der Φ^4 und einer beliebigen F^2 symbolisch dargestellt durch:

$$(a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\xi_4)^4 = 0 \quad \text{und} \quad (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\alpha_4x_4)^2 = 0,$$

so ist die symbolische Gleichung der Polare von F^2 in Bezug auf Φ^4:

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)^2(a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3+a_4\xi_4)^2 = 0\text{*)};$$

entwickelt man diese nach Potenzen der Ebenencoordinaten ξ_i und bezeichnet mit b_{ii} und $2b_{ik}$ die Coefficienten von ξ_i^2 resp. $\xi_i\xi_k$, so erhält man unter Berücksichtigung der obigen Gleichungen die Substitution (D.).

Die bilineare Gleichung (B.) kann im vorliegenden Falle symbolisch geschrieben werden:

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)^2(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3+a_4\beta_4)^2 = 0;$$

*) Dieser Band, S. 15; vgl. Bd. 79, S. 166.

ihr genügen die Coordinaten α_{ik} und β_{ik} von je zwei F^2, welche ***in Bezug auf*** Φ^4 einander conjugirt sind. Aus ihr ergiebt sich die Gleichung des durch Φ^4 bestimmten quadratischen F^2-Systemes, wenn $\alpha_{ik} = \beta_{ik} = \gamma_{ik}$ gesetzt wird.

31. Mit jeder Fläche vierter Classe ist also durch die Polarentheorie ein quadratisches F^2-System und damit zugleich ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe verbunden; und zwar steht jede F^2 und jede Φ^2 dieser quadratischen Flächenmannigfaltigkeiten zu der Φ^4 in ***invarianter*** Beziehung, weil polare Beziehungen überhaupt invariant sind*). Die Berührungsebenen der Φ^4 sind zweifache Ebenen des quadratischen F^2-Systemes, ihre zweiten Polaren in Bezug auf Φ^4 gehören dem quadratischen Φ^2-Gewebe an. Ueberhaupt aber stützt jede F^2 des quadratischen Systemes ihre Polare bezüglich der Φ^4, und diese Polare gehört zu dem quadratischen Φ^2-Gewebe achter Stufe.

Zu der Φ^4 steht auch diejenige F^4 in invarianten Beziehungen, welche die zweifachen Punkte des quadratischen Φ^2-Gewebes enthält (24.). Die Gleichung dieser F^4 ergiebt sich, wenn man in (E.) die Werthe der l^{ik}_{mn} und zugleich $a_{ik} = b_{ik} = x_i x_k$ einsetzt, in folgender Form**):

$$(E_1.) \quad \begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1x_3 & \dots & x_3x_4 & x_4^2 \\ x_1^2 & a_{4000} & a_{3100} & a_{2200} & a_{3010} & \dots & a_{2011} & a_{2002} \\ x_1x_2 & a_{3100} & a_{2200} & a_{1300} & a_{2110} & \dots & a_{1111} & a_{1102} \\ x_2^2 & a_{2200} & a_{1300} & a_{0400} & a_{1210} & \dots & a_{0211} & a_{0202} \\ x_1x_3 & a_{3010} & a_{2110} & a_{1210} & a_{2020} & \dots & a_{1021} & a_{1012} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_4^2 & a_{2002} & a_{1102} & a_{0202} & a_{1012} & \dots & a_{0013} & a_{0004} \end{vmatrix} = 0;$$

sie ist linear in Bezug auf a_{4000}, a_{0400}, a_{0040} und a_{0004}, quadratisch in Bezug auf a_{3100}, a_{3010}, $\dots$, a_{0013}, kubisch hinsichtlich a_{2200}, a_{2020}, $\dots$, a_{0022}, biquadratisch hinsichtlich a_{2110}, a_{1210}, $\dots$, a_{0112}, endlich vom sechsten Grade bezüglich a_{1111}. Alle Φ^4, deren zugehörige F^4 durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden ein Φ^4-Gewebe achter Stufe zehnten Grades.

32. Die invarianten Beziehungen einer Fläche vierter Classe Φ^4 und der mittelst der Gleichung (E_1.) durch sie bestimmten Fläche vierter Ord-

---

*) Dieses Journal, Bd. 79, S. 171.

**) Vgl. meine Arbeit über die „Darstellung quaternärer biquadratischer Formen durch zehn Biquadrate", in diesem Journal Bd. 78, S. 123.

nung F^4 sind nur in ganz besonderen Fällen zugleich reciproke. Diejenigen Φ^2, welche auf ihre Polaren bezüglich der F^4 sich stützen, bilden allerdings ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe, jedoch nicht das oben (31.) erwähnte, welches unmittelbar durch Φ^4 bestimmt ist; und ihre Polaren bilden wohl ein quadratisches F^2-System achter Stufe, aber die zweifachen Ebenen desselben umhüllen im Allgemeinen nicht die Φ^4, sondern eine andere Fläche vierter Classe Φ_1^4, welche auf ähnliche Art durch F^4 bestimmt ist, wie F^4 durch Φ^4. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht, wenn man für die Φ^4-Coordinaten a_{qrst} beliebige Zahlwerthe in die Gleichungen einsetzt. Auch lässt sich zeigen, dass eine und dieselbe F^4 aus verschiedenen Φ^4 abgeleitet werden kann, sodass allerdings F^4 durch Φ^4, nicht aber umgekehrt Φ^4 durch die aus ihr abgeleitete F^4 eindeutig bestimmt ist. Also:

Mittelst der erweiterten Polarentheorie kann aus einer beliebigen Φ^4 (oder F^4) eine ganze Reihe von Flächen vierter Classe resp. vierter Ordnung Φ^4, F^4, Φ_1^4, F_1^4, Φ_2^4, F_2^4, ... abgeleitet werden, die alle in invarianten Beziehungen zu einander stehen, und von denen jede in der oben (31.) *angegebenen Weise eindeutig aus der vorhergehenden, nicht aber eindeutig aus der folgenden sich ergiebt.*

Diese Reihe von Flächen ist im Allgemeinen ohne Ende, und nur dann, wenn eine ihrer Flächen unbestimmt wird, bricht sie ab. Sie kann aber wie eines der nachfolgenden Beispiele lehrt (35.), von einer bestimmten Fläche an periodisch werden.

33. Wir müssen darauf verzichten, die merkwürdige Gleichung (E_1.) und die mannigfaltigen gegenseitigen Beziehungen der Fläche Φ^4 und der aus ihr abgeleiteten Flächen F^4, Φ_1^4, F_1^4 u. s. w. hier ausführlich zu erörtern. Wir beschränken uns auf einige leicht zu begründende Bemerkungen, welche specielle Flächen vierter Classe oder Ordnung betreffen, aber trotzdem auf die Wichtigkeit jener Beziehungen vielleicht einiges Licht werfen.

Wenn Φ^4 alle Ebenen einer Geraden zweimal berührt, so geht F^4 zweimal durch alle Punkte der Geraden, und letztere ist zweifache Gerade von allen aus Φ^4 abgeleiteten Flächen F^4, Φ_1^4, F_1^4, ...

Nimmt man nämlich auf der Geraden die Eckpunkte $\xi_3 = 0$ und $\xi_4 = 0$ des Coordinatentetraëders an, sodass sich in ihr die Flächen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ desselben schneiden, so erhält die Gleichung der Φ^4 die Form:

$$\xi_3^2\varphi_{33}+\xi_3\xi_4\varphi_{34}+\xi_4^2\varphi_{44} = 0,$$

indem φ_{33}, φ_{34} und φ_{44} homogene Functionen zweiten Grades von ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 bezeichnen. Es wird also $a_{qrst} = 0$, so oft $q+r > 2$ ist, und die Gleichung $(E_1.)$ von F^4 geht über in:

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1x_3 & x_1x_4 & x_2x_3 & x_2x_4 & x_3^2 & x_3x_4 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2020} & a_{2011} & a_{2002} \\ x_1x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1120} & a_{1111} & a_{1102} \\ x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{0220} & a_{0211} & a_{0202} \\ x_1x_3 & 0 & 0 & 0 & a_{2020} & a_{2011} & a_{1120} & a_{1111} & a_{1030} & a_{1021} & a_{1012} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_4^2 & a_{2002} & a_{1102} & a_{0202} & a_{1012} & a_{1003} & a_{0112} & a_{0103} & a_{0022} & a_{0013} & a_{0004} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung hat, wie man leicht sieht, die Form:

$$x_1^2 f_{11} + x_1 x_2 f_{12} + x_2^2 f_{22} = 0,$$

sodass in der That jeder Punkt der Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ein Doppelpunkt der F^4 ist. Ganz ebenso ergiebt sich, dass die aus F^4 abgeleitete Fläche Φ_1^4 alle Ebenen der Geraden zweimal berührt; u. s. w.

34. *Sind die Ebenen der Fläche Φ^4 paarweise harmonisch getrennt durch einen Punkt A und eine Ebene α, so sind auch die Punkte der aus Φ^4 abgeleiteten Fläche F^4 durch A und α paarweise harmonisch getrennt, desgleichen die Ebenen und Punkte der Flächen Φ_1^4, F_1^4, Φ_2^4 u. s. w.*

Zum Beweise verlege man nach A den einen Eckpunkt $\xi_4 = 0$ und in die Ebene α die ihm gegenüberliegende Fläche $x_4 = 0$ oder $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ des Coordinatentetraëders. Dann hat die Gleichung der Φ^4 die Form:

$$\varphi^4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \varphi^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\xi_4^2 + a_{0004}\xi_4^4 = 0,$$

d. h. sie enthält von ξ_4 nur die geraden Potenzen, und es ist $a_{qrst} = 0$, so oft t ungerade ist. Setzt man aber in $(E_1.)$ überall $a_{qrs1} = 0$ und $a_{qrs3} = 0$ so erkennt man sofort, dass diese Gleichung nur die geraden Potenzen von x_4 enthält, also die Form hat:

$$f^4(x_1, x_2, x_3) + f^2(x_1, x_2, x_3)x_4^2 + \alpha_{0004}x_4^4 = 0;$$

damit aber ist unser Satz bewiesen.

Wenn z. B. Φ^4 einen Mittelpunkt A besitzt (in welchem Falle die Ebene α unendlich fern liegt), so ist A zugleich Mittelpunkt aller aus Φ^4 abgeleiteten Flächen F^4, Φ_1^4, F_1^4 u. s. w. Eine Symmetrieebene von Φ^4 ist zugleich Symmetrieebene von F^4, $\Phi_1^4, \ldots$ Ist insbesondere Φ^4 eine Rotationsfläche, so sind auch alle aus Φ^4 abgeleiteten Flächen Rotationsflächen mit der nämlichen Axe.

35. ***Wenn sich Φ^4 auf eine (nicht singuläre) zweifache Φ^2 reducirt, so geht die aus Φ^4 abgeleitete F^4 über in die zweifache F^2, deren Berührungsebenen jene Φ^2 bilden, und Φ_1^4 wird mit Φ^4 identisch.***

Dieses folgt schon aus (33.), wonach jede Gerade von Φ^2 eine zweifache Gerade der Flächen Φ^4, F^4, Φ_1^4, ... ist; ebenso folgt es aus (34.). Wir wollen aber noch einen Beweis dieses Satzes geben.

Die Gleichung einer Φ^4 habe die einfache Form:

$$3A_{11}\xi_1^4+6A_{12}\xi_1^2\xi_2^2+3A_{22}\xi_2^4+6A_{13}\xi_1^2\xi_3^2+\cdots+6A_{34}\xi_3^2\xi_4^2+3A_{44}\xi_4^4 = 0;$$

dann kann die Gleichung $(E_1.)$ der zugehörigen F^4 verwandelt werden in:

$$\begin{vmatrix} -u & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 3A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ x_2^2 & A_{21} & 3A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ x_3^2 & A_{31} & A_{32} & 3A_{33} & A_{34} \\ x_4^2 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & 3A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

wenn

$$u = \frac{x_1^2x_2^2}{A_{12}}+\frac{x_1^2x_3^2}{A_{13}}+\frac{x_1^2x_4^2}{A_{14}}+\frac{x_2^2x_3^2}{A_{23}}+\frac{x_2^2x_4^2}{A_{24}}+\frac{x_3^2x_4^2}{A_{34}}$$

gesetzt wird. Sie enthält also nur die geraden Potenzen von x_1, x_2, x_3, x_4. Ist $A_{ik}=A_{ki}=A_i.A_k$, so geht die Gleichung der Φ^4 über in:

$$3(A_1\xi_1^2+A_2\xi_2^2+A_3\xi_3^2+A_4\xi_4^2)^2 = 0,$$

und repräsentirt eine zweifache Φ^2, welche auf ein beliebiges Poltetraëder bezogen ist. Zugleich aber wird die Gleichung der F^4 identisch mit:

$$-20A_1^2A_2^2A_3^2A_4^2\left(\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{x_2^2}{A_2}+\frac{x_3^2}{A_3}+\frac{x_4^2}{A_4}\right)^2 = 0,$$

d. h. F^4 reducirt sich auf die zweifache F^2, welche von den Ebenen jener Φ^2 berührt wird.

Auf die oben angenommene einfache Form kann u. A. die Gleichung:

$$3(A_1\xi_1^2+A_2\xi_2^2+A_3\xi_3^2+A_4\xi_4^2).(A_1\xi_1^2+A_2\xi_2^2+A_3\xi_3^2+B_4\xi_4^2) = 0$$

gebracht werden; dieselbe repräsentirt zwei Φ^2, welche sich in allen Punkten eines Kegelschnittes berühren, und zwar bilden die Punkte $\xi_1=0$, $\xi_2=0$ und $\xi_3=0$ ein beliebiges Poldreieck dieses Kegelschnittes, während im Punkte $\xi_4=0$ die gemeinschaftlichen Berührungsebenen der beiden Φ^2 sich schneiden. Setzt man nun in die Gleichung der zugehörigen F^4 ein:

$$A_{ik}=A_iA_k,\quad A_{i4}=\frac{A_i}{2}(A_4+B_4)\quad \text{für}\quad i \text{ und } k=1,\ 2,\ 3,$$

sowie $A_{44} = A_4 B_4$, so enthält dieselbe die Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 nur in den Verbindungen $\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{x_2^2}{A_2}+\frac{x_3^2}{A_3}$ und $\frac{x_4^2}{A_4}$, kann also auf die Form:

$$\left(\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{x_2^2}{A_2}+\frac{x_3^2}{A_3}+\alpha\cdot\frac{x_4^2}{A_4}\right)\cdot\left(\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{x_2^2}{A_2}+\frac{x_3^2}{A_3}+\beta\cdot\frac{x_4^2}{A_4}\right) = 0$$

gebracht werden. Daraus aber folgt:

Besteht Φ^4 aus zwei Flächen zweiter Classe, die sich in allen Punkten eines Kegelschnittes berühren, so zerfällt die aus Φ^4 abgeleitete F^4 in zwei Flächen zweiter Ordnung, die sich in den Punkten desselben Kegelschnittes berühren.

Ebenso beweist man, dass die Gleichung der F^4 sich auf die Form:

$$m\left(\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{x_2^2}{A_2}\right)^2+n\left(\frac{x_1^2}{A_1}+\frac{x_2^2}{A_2}\right)\left(\frac{x_3^2}{A_3}+\frac{x_4^2}{A_4}\right)+p\left(\frac{x_3^2}{A_3}+\frac{x_4^2}{A_4}\right)^2 = 0$$

bringen lässt, wenn diejenige von Φ^4 die analoge Form:

$$\mu\,(A_1\xi_1^2+A_2\xi_2^2)^2+\nu\,(A_1\xi_1^2+A_2\xi_2^2)\,(A_3\xi_3^2+A_4\xi_4^2)+\pi\,(A_3\xi_3^2+A_4\xi_4^2)^2 = 0$$

annimmt. Daraus aber folgt:

Wenn Φ^4 in zwei Flächen zweiter Classe zerfällt, welche sich in den vier Geraden eines windschiefen Vierecks schneiden, so besteht F^4 aus zwei Flächen zweiter Ordnung, welche durch dieselben vier Geraden gehen.

36. Das quadratische F^2-System achter Stufe, welches (31.) mit einer beliebigen Φ^4 verbunden ist, hat eine Doppel-F^2, wenn die Discriminante seiner Gleichung, d. h. die Determinante:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{4000} & a_{3100} & a_{2200} & a_{3010} & \cdots & a_{2011} & a_{2002} \\ a_{3100} & a_{2200} & a_{1300} & a_{2110} & \cdots & a_{1111} & a_{1102} \\ a_{2200} & a_{1300} & a_{0400} & a_{1210} & \cdots & a_{0211} & a_{0202} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2002} & a_{1102} & a_{0202} & a_{1012} & \cdots & a_{0013} & a_{0004} \end{vmatrix}$$

verschwindet (15.). Jene ausgezeichnete F^2 des Systemes ist apolar zu der Φ^4, und ist jeder anderen F^2 des Raumes in Bezug auf Φ^4 conjugirt (vgl. 8.); die Determinante $\triangle$ ist eine Invariante von Φ^4 *).

Das mit dem quadratischen F^2-System verbundene quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe reducirt sich aber in dem genannten Falle, wie wir wissen (21.), auf das zweifache lineare Φ^2-Gewebe achter Stufe, welches auf der Doppel-F^2 ruht. Daraus folgt:

---

*) Vgl. dieses Journal Bd. 79, S. 173.

Wenn die Invariante $\triangle$ einer Φ^4 verschwindet und also eine zu Φ^4 apolare F^2 existirt, so reducirt sich die aus Φ^4 abgeleitete F^4 auf diese, zweimal zu zählende F^2.

Auch die übrigen aus Φ^4 abgeleiteten Flächen Φ_1^4, F_1^4, ... reduciren sich alsdann auf die zweifache F^2 (35.), wenn F^2 keine Kegelfläche ist.

Wenn alle ersten Minoren der Invariante $\triangle$ verschwinden, so wird die aus Φ^4 abgeleitete F^4 unbestimmt,
wie die Form der Gleichung (E_1.) sofort erkennen lässt. Insbesondere ergiebt sich:

Wenn Φ^4 in eine Φ^3 und eine Φ^1 zerfällt, so wird F^4 unbestimmt.

Denn legen wir einen Eckpunkt $\xi_4 = 0$ des Coordinatentetraëders in den Punkt Φ^1, so wird die Gleichung der Φ^4 durch ξ_4 theilbar, und es wird $a_{qrst} = 0$, so oft $t = 0$ ist; dadurch aber wird die linke Seite der Gleichung (E_1.) identisch Null.

Wenn Φ^4 eine Ebene (etwa $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$) dreifach enthält, so reducirt sich F^4 auf diese, viermal zu zählende Ebene und Φ_1^4 wird deshalb unbestimmt.

Nämlich die Gleichung der Φ^4 ist linear hinsichtlich der Coordinate ξ_4, so oft der genannte Fall eintritt. Setzt man aber in (E_1.) überall $a_{qrst} = 0$, wo $t > 1$ ist, so geht diese Gleichung über in $x_4^4 = 0$, wie behauptet wurde. — Ebenso folgt: Wenn eine F^4 einen dreifachen Punkt besitzt, so reducirt sich die aus ihr abgeleitete Fläche vierter Classe auf diesen Punkt.

§. 5. Das Nullsystem von neun Dimensionen.

37. Wir kehren nochmals zu der bilinearen Gleichung (B.) zurück (6.), durch welche die F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe neunter Stufe der Räume R_x und R_y reciprok auf einander bezogen wurden. Wir wissen (9.), dass diejenigen F^2, welche ihre entsprechenden Φ^2 stützen und also durch (B.) mit sich selbst verknüpft sind, im Allgemeinen ein quadratisches F^2-System achter Stufe bilden; nur der besondere Fall, in welchem $l_{mn}^{ik} = -l_{ik}^{mn}$ und folglich $l_{ik}^{ik} = 0$ ist, bildet eine Ausnahme.

Nämlich in diesem Falle wird die linke Seite der Gleichung (B.) identisch Null, wenn man $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ setzt, d. h. jede F^2 stützt die ihr entsprechende Φ^2 und ist mit sich selbst verknüpft. Da ausserdem die Gleichung (B.) durch Vertauschung der α_{ik} mit den resp. β_{ik} links nur das Vorzeichen wechselt, so ist die reciproke Beziehung eine ***involutorische***, und

wir brauchen die beiden Räume nicht weiter zu unterscheiden. Wegen der Analogie mit dem gewöhnlichen Nullsystem (5.) wollen wir sagen, das F^2-System und das Φ^2-Gewebe bilden, wenn $l^{ik}_{mn} = -l^{mn}_{ik}$ ist, ein *Nullsystem von neun Dimensionen*. Also:

Wenn ein F^2-System und ein Φ^2-Gewebe neunter Stufe reciprok so auf einander bezogen sind, dass jede F^2 die ihr entsprechende Φ^2 stützt, so bilden sie ein Nullsystem von neun Dimensionen. Solcher Nullsysteme giebt es 44-fach unendlich viele;

denn ihre Gleichung (*B.*) enthält 45 Coefficienten $l^{ik}_{mn} = -l^{mn}_{ik}$.

Auch die linke Seite der Gleichung (*E.*), durch welche die Φ^2 des Raumes mit einander verknüpft werden, ändert im vorliegenden Falle durch Vertauschung der a_{ik} mit den resp. b_{ik} nur ihr Vorzeichen; sie wird identisch Null, wenn $a_{ik} = b_{ik}$ gesetzt wird, weil zwischen den ersten Minoren der Determinante $\triangle = \Sigma \pm l^{11}_{11} l^{12}_{12} \dots l^{44}_{44}$ bekanntlich die Gleichungen $\lambda^{ik}_{mn} = -\lambda^{mn}_{ik}$ bestehen, wenn $l^{ik}_{mn} = -l^{mn}_{ik}$ ist.

38. Im Nullsystem von neun Dimensionen sollen zwei F^2 *„conjugirt"* genannt werden, wenn eine und folglich jede derselben die der anderen *„zugeordnete"* (d. h. entsprechende) Φ^2 stützt. Ebenso heissen zwei lineare F^2-Systeme „conjugirt", wenn auf dem einen und folglich auf jedem das dem anderen zugeordnete Φ^2-Gewebe ruht. Z. B. einem F^2-Büschel sind im Nullsystem alle Flächen, F^2-Büschel, F^2-Bündel u. s. w. des linearen F^2-Systemes siebenter Stufe conjugirt, welches die dem Büschel zugeordnete Φ^2-Schaar stützt. Einem linearen F^2-System p^{ter} Stufe ist ein einziges System $(8-p)^{\text{ter}}$ Stufe conjugirt nebst allen in demselben enthaltenen F^2 und linearen F^2-Systemen von 1, 2, 3, ..., $7-p$ Dimensionen; auf diesem F^2-Systeme $(8-p)^{\text{ter}}$ Stufe ruht das Φ^2-Gewebe p^{ter} Stufe, welches dem F^2-Systeme p^{ter} Stufe zugeordnet ist. Zwei lineare F^2-Systeme p^{ter} und q^{ter} Stufe sind demnach einander conjugirt, wenn irgend $q+1$ linear unabhängige Flächen des letzteren dem ersteren conjugirt sind.

Da jede F^2 des Raumes sich selbst conjugirt ist (vgl. 37.), so bestimmen allemal zwei conjugirte F^2 einen sich selbst conjugirten F^2-Büschel, von welchem je zwei Flächen einander conjugirt sind. — Wählt man fünf linear unabhängige F^2 so, dass jede von ihnen den vier übrigen conjugirt ist, so bestimmen dieselben ein sich selbst conjugirtes lineares F^2-System vierter Stufe; alle in diesem enthaltenen Flächen und linearen F^2-Systeme sind einander und zugleich sich selbst conjugirt. Die sich selbst conjugirten

linearen F^2-Systeme sind den Leitstrahlen des gewöhnlichen Nullsystemes (5.) vergleichbar.

39. ***Ein lineares F^2-System p^{ter} Stufe enthält im Allgemeinen und mindestens $\frac{1}{2}(2p-3q)(q+1)$-fach unendlich viele, sich selbst conjugirte lineare F^2-Systeme q^{ter} Stufe, wenn $0<2q\leqq p$ ist.*** Wählt man nämlich in dem System p^{ter} Stufe irgend $q+1$ linear unabhängige F^2 so, dass jede derselben den q übrigen conjugirt ist, so bestimmen diese F^2 eines der sich selbst conjugirten F^2-Systeme q^{ter} Stufe. Von den $q+1$ conjugirten F^2 kann die erste ganz beliebig in dem Systeme p^{ter} Stufe angenommen werden; die $(i+1)^{\text{te}}$ darf mit den i vorhergehenden nicht in einem linearen F^2-System $(i-1)^{\text{ter}}$ Stufe liegen, kann aber sonst beliebig in einem gewissen linearen F^2-Systeme $(p-i)^{\text{ter}}$ oder höherer Stufe angenommen werden, und zwar durchdringen sich in diesem das System p^{ter} Stufe und dasjenige lineare System $(9-i)^{\text{ter}}$ Stufe, welches den i vorhergehenden F^2 conjugirt ist. Da wegen $p\geqq 2q\geqq 2i$ auch $p-i>i-1$ ist, so können die $q+1$ F^2 im Allgemeinen auf: $p+(p-1)+\cdots+(p-i)+\cdots+(p-q)$ oder $\frac{1}{2}(2p-q).(q+1)$-fach unendlich viele Arten so, wie vorhin angegeben, gewählt werden. Die Anzahl der so bestimmten F^2-Systeme q^{ter} Stufe ist aber nur $\frac{1}{2}(2p-q)(q+1)-q(q+1)$-fach unendlich, weil jedes von ihnen auf diese Weise $\infty^{q(q+1)}$-mal erhalten wird.

Für $p=9$ und $q=1$, 2, 3, 4 ergiebt sich insbesondere:

Im Nullsystem von neun Dimensionen giebt es ∞^{15} sich selbst conjugirte F^2-Büschel und lineare F^2-Systeme vierter Stufe, und ∞^{18} sich selbst conjugirte F^2-Bündel und F^2-Gebüsche. Durch jede F^2 gehen, wie man leicht beweist, ∞^7 F^2-Büschel, ∞^{11} F^2-Bündel, ∞^{12} F^2-Gebüsche und ∞^{10} lineare F^2-Systeme vierter Stufe, welche sich selbst conjugirt sind.

Eine Ausnahme erleidet der obige Satz u. A. dann, wenn das lineare F^2-System p^{ter} Stufe sich selbst conjugirt ist; in diesem Falle ist jedes der $\infty^{(p-q)(q+1)}$ in ihm enthaltenen linearen F^2-Systeme q^{ter} Stufe sich selbst conjugirt (38.).

40. ***In jedem linearen F^2-System p^{ter} Stufe giebt es, wenn $p>1$ ist, im Allgemeinen und mindestens eine F^2, welche allen übrigen Flächen des Systemes conjugirt ist, und die Nullfläche des Systemes heissen mag.*** Wenn nicht jede F^2 des Systemes allen übrigen conjugirt ist, so kann man in demselben auf unendlich viele Arten p linear unabhängige Flächen so annehmen, dass keine zwei derselben einander conjugirt sind. Diesen p Flächen

aber sind alle Flächen eines linearen F^2-Systemes $(9-p)^{\text{ter}}$ Stufe conjugirt, welches mit dem System p^{ter} Stufe mindestens eine F^2 gemein hat; dieselbe ist sich selbst und jenen p Flächen conjugirt, also auch allen F^2 des linearen Systemes p^{ter} Stufe, welches durch sie und die p Flächen bestimmt ist.

Wenn ein lineares F^2-System p^{ter} Stufe ein sich selbst conjugirtes lineares F^2-System q^{ter} Stufe enthält und $2q > p$ ist, so giebt es in letzterem System mindestens ∞^{2q-p} Flächen, welche allen F^2 des Systemes p^{ter} Stufe conjugirt sind und Nullflächen desselben heissen mögen. Diese Nullflächen bilden ein lineares F^2-System von im Allgemeinen und mindestens $2q-p$ Dimensionen. Wenn nämlich nicht jede F^2 des Systemes p^{ter} Stufe allen übrigen conjugirt ist, so kann man eine dasselbe bestimmende Gruppe von $p+1$ Flächen so annehmen, dass von ihnen $p-q$ ausserhalb des linearen F^2-Systemes q^{ter} Stufe liegen und dass keine zwei dieser $p-q$ Flächen einander conjugirt sind. Das lineare F^2-System $9-(p-q)^{\text{ter}}$ Stufe, welches diesen $p-q$ Flächen conjugirt ist, hat aber mit dem System q^{ter} Stufe ein lineares F^2-System von im Allgemeinen und mindestens $2q-p$ Dimensionen gemein, dessen Flächen dem linearen System p^{ter} Stufe (weil den $p+1$ linear unabhängigen F^2 desselben) conjugirt sind.

41. Ist $2q = p$, so ergiebt sich auf gleiche Art der Satz:

Durch die Nullfläche eines linearen F^2-Systemes $2q^{ter}$ Stufe gehen alle sich selbst conjugirten linearen F^2-Systeme q^{ter} Stufe desselben,

wenn nämlich nur eine solche Nullfläche existirt (40.). So z. B. enthält *jedes* lineare F^2-System achter Stufe ∞^{10} sich selbst conjugirte lineare Systeme vierter Stufe; dieselben gehen sämmtlich durch die Nullfläche des Systemes achter Stufe. Und ein F^2-Bündel, der nicht sich selbst conjugirt ist, enthält einfach unendlich viele sich selbst conjugirte F^2-Büschel, die sich aber alle in der Nullfläche des Bündels schneiden. Dieser Satz ist dem bekannten Satze analog, dass alle in einer Ebene liegenden Leitstrahlen eines gewöhnlichen Nullsystemes sich in dem Nullpunkte der Ebene schneiden. Das Analogon eines anderen bekannten Satzes ist der folgende, sofort einleuchtende:

Die Nullflächen aller linearen F^2-Systeme p^{ter} Stufe, welche durch ein lineares F^2-System q^{ter} Stufe gehen, bilden das dem letzteren conjugirte F^2-System $(8-q)^{ter}$ *Stufe* (38.).

42. Die Gesammtheit aller linearen F^2-Systeme p^{ter} Stufe, welche im Nullsystem von 9 Dimensionen sich selbst conjugirt sind, ist vergleichbar

dem linearen Strahlencomplex, welcher von den Leitstrahlen eines gewöhnlichen Nullsystemes gebildet wird. Gleichwie jede Gerade ein Leitstrahl ist, welche mit zwei Leitstrahlen in einer Ebene liegt und durch ihren Schnittpunkt geht, ebenso ist jedes lineare F^2-System p^{ter} Stufe sich selbst conjugirt, welches mit irgend zwei sich selbst conjugirten in einem linearen F^2-System $(p+1)^{\text{ter}}$ Stufe liegt und durch das ihnen gemeinschaftliche System $(p-1)^{\text{ter}}$ Stufe geht; denn jede F^2 des letzteren ist eine Nullfläche des Systemes $(p+1)^{\text{ter}}$ Stufe, u. s. w. Wenn z. B. zwei sich selbst conjugirte F^2-Büschel in einem F^2-Bündel liegen und folglich eine F^2 mit einander gemein haben, so ist jeder durch diese F^2 gehende F^2-Büschel des Bündels sich selbst conjugirt.

Strassburg i. E. 22. Juli 1876.

Ueber die Determinanten, deren correspondirende Elemente a_{pq} und a_{qp} entgegengesetzt gleich sind.

(Von Herrn *F. Mertens* in Krakau.)

Obgleich der von Herrn *Cayley* zuerst ausgesprochene Satz *), dass eine Determinante geraden Grades

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

in welcher die Elemente den Bedingungen

$$(1.) \quad a_{pp} = 0,$$

$$(2.) \quad a_{pq} + a_{qp} = 0$$

genügen, ein vollständiges Quadrat, und zwar das Quadrat eines von *Jacobi* bei Gelegenheit des *Pfaff*schen Integrationsproblems **) aufgestellten Ausdrucks ist, von Herrn *Cayley* sowie von den Herren *Borchardt* und *Scheibner* ***) elegant bewiesen worden ist, so dürfte es dennoch von Interesse sein, den Beweis desselben direct an den Gliedern von D zu versuchen.

Bekanntlich besteht das Bildungsgesetz der Glieder der Determinante eines allgemeinen Elementensystems

$$\begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{matrix}$$

darin, dass an den zweiten (oder ersten) Zeigern $1, 2, \dots n$ des Diagonalgliedes

$$b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$$

alle möglichen Umsetzungen †) zu vollziehen sind und jedes der Resultate mit dem Zeichen $+$ oder $-$ zu behaften ist, je nachdem die betreffende

---

*) Dieses Journal Bd. 38 pag. 93.

**) Dieses Journal Bd. 2 pag. 353 und Bd. 29 pag. 237.

***) Siehe *Baltzer* Determinanten §. 7 sowie die Leipziger Berichte vom Jahre 1859.

†) oder, wenn man lieber will, Permutationen.

Umsetzung einer geraden oder ungeraden Anzahl von aufeinander folgenden Vertauschungen zweier Zeiger gleichkommt.

Jede Umsetzung $\mathfrak{U}$ oder

$$(3.)\qquad \begin{pmatrix}\alpha'\beta' \dots \nu' \\ \alpha\beta \dots \nu\end{pmatrix}$$

ist ferner, wie bekannt, in cyklische Factoren zerlegbar, d. h. es lassen sich die Zeiger der unteren Reihe in dem Symbol (3.) derart in Gruppen abtheilen, dass die Wirkung der Umsetzung $\mathfrak{U}$ durch cyklische Umsetzung der Zeiger jeder Gruppe erreicht wird, wobei die etwa sich behauptenden Zeiger als je eine Gruppe bildend anzusehen sind. Nach der *Cauchy*schen Regel ist dann das Vorzeichen des aus der Umsetzung $\mathfrak{U}$ hervorgehenden Determinantengliedes $=(-1)^{n-g}$, wo g die Anzahl der cyklischen Factoren von $\mathfrak{U}$ bezeichnet.

Dies vorausgeschickt, unterscheide man in Bezug auf die Determinante D unter den $n!$ Umsetzungen der Zeiger $1, 2, \dots n$ folgende drei Arten:

A) Umsetzungen mit sich behauptenden Zeigern. Jedes der aus diesen Umsetzungen hervorgehenden Glieder der Determinante D ist nach (1.) gleich 0.

B) Umsetzungen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Zeigern bestehende cyklische Factoren enthalten. Es sei

$$\begin{pmatrix}\beta\gamma \quad\ \ \alpha, \dots \\ \alpha\beta \dots \varepsilon, \dots\end{pmatrix}$$

eine solche Umsetzung $\mathfrak{U}$, und zwar sei unter allen cyklischen Factoren von $\mathfrak{U}$ mit ungerader Zeigeranzahl der in Evidenz gesetzte derjenige, welcher den kleinstmöglichen Zeiger enthält. Alsdann giebt es allemal eine von $\mathfrak{U}$ verschiedene Umsetzung $\begin{pmatrix}\alpha\beta \dots \varepsilon, \dots \\ \beta\gamma \dots \alpha, \dots\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}\varepsilon \ \dots \ \beta\alpha, \dots \\ \alpha\varepsilon \dots \gamma\beta, \dots\end{pmatrix}$, welche, abgesehen von dem ersten, die nämlichen cyklischen Factoren wie $\mathfrak{U}$ besitzt, während der erste cyklische Factor die Umkehrung des ersten cyklischen Factors von $\mathfrak{U}$ ist. Die aus zwei solchen sich gegenseitig entsprechenden Umsetzungen entspringenden Glieder von D

$$\pm a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} \dots a_{\varepsilon\alpha} P, \quad \pm a_{\beta\alpha} a_{\gamma\beta} \dots a_{\alpha\varepsilon} P,$$

wo P das Product der übrigen Elemente bezeichnet, haben dasselbe Vorzeichen und heben sich daher gegeneinander auf, weil nach (2.)

$$a_{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} \dots a_{\varepsilon\alpha} + a_{\beta\alpha} a_{\gamma\beta} \dots a_{\alpha\varepsilon} = 0$$

ist.

C) Umsetzungen, welche nur cyklische Factoren mit gerader Zeigeranzahl enthalten. Jede dieser Umsetzungen denke man sich derart geordnet, dass die erste Gruppe der in cyklischer Weise umzusetzenden Zeiger mit dem Zeiger 1 anfängt, die zweite Gruppe, falls eine solche vorhanden ist, mit dem kleinstmöglichen Zeiger anfängt u. s. w., und es sei

$$(4.)\qquad \begin{pmatrix} gh\ \dots\ 1, g'\ \dots\ f', \dots \\ 1g\ \dots\ l, f'\ \dots\ l', \dots \end{pmatrix}$$

eine derart geordnete Umsetzung. Stellt man dann den ersten und zweiten, dritten und vierten, ... $(n-1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Zeiger der unteren Reihe zu je einem Paare zusammen und verfährt ebenso mit den Zeigern der oberen Reihe, so erhält man zwei Reihen

$$(5.)\qquad (1, g)\ \dots\ (f', g')\ \dots,$$

$$(6.)\qquad (g, h)\ \dots\ (l' f')\ \dots$$

von je $\frac{n}{2}$ Zeigerpaaren, in deren jeder nur verschiedene Zeiger vorkommen. Um eine Uebersicht über die Reihen von Zeigerpaaren zu gewinnen, welche man durch dieses Verfahren aus allen möglichen Umsetzungen von der Form (4.) erhält, denke man sich die Zeiger $1, 2, \dots n-1, n$ auf alle möglichen verschiedenen Weisen in je $\frac{n}{2}$ Paare abgetheilt, wobei die Reihenfolge der Zeiger jedes Paares gleichgültig ist, nenne den Complex dieser Reihen von je $\frac{n}{2}$ Zeigerpaaren, deren Anzahl gleich $\frac{n!}{2^{\frac{1}{2}n}\left(\frac{n}{2}\right)!} = 1.3\dots(n-1)$ ist, Ω und untersuche, ob und aus wie vielen Umsetzungen von der Form (4.) irgend eine Combination $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ zweier dem Complex Ω angehörender Zeigerpaarreihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ durch das obige Verfahren hervorgehen kann. Erlaubt man sich zur Abkürzung die Ausdrucksweise, dass zwei Zeiger zusammengehören, wenn sie zusammen ein Paar bilden, so ermittele man den Zeiger g, welcher in der Reihe $\mathfrak{R}$ mit 1 zusammengehört, dann den Zeiger h, welcher in der Reihe $\mathfrak{R}'$ mit g zusammengehört, hierauf den Zeiger i, welcher in $\mathfrak{R}$ mit h zusammengehört u. s. f., bis man auf den Zeiger l stösst, welcher in der Reihe $\mathfrak{R}'$ mit 1 zusammengehört. Erschöpfen die Paare, durch welche man auf diese Weise hindurchgegangen ist, noch nicht die Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, so suche man unter den in $\mathfrak{R}$ zurückgebliebenen Paaren dasjenige, welches den kleinstmöglichen Zeiger f' enthält, bezeichne den anderen Zeiger dieses Paares mit g', ermittele dann den Zeiger h', welcher

in $\mathfrak{R}'$ mit g' zusammengehört, hierauf den Zeiger i', welcher in $\mathfrak{R}$ mit h' zusammengehört u. s. f., bis man auf den Zeiger l' stösst, welcher in $\mathfrak{R}'$ mit f' zusammengehört. So fahre man fort, bis nach einigen Wiederholungen dieses Verfahrens sämmtliche Paare der Reihen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ erschöpft sind. Es ist dann

$$(7.)\quad \begin{pmatrix} gh & 1, g' & f', \dots \\ 1g \dots & l, f' \dots & l', \dots \end{pmatrix}$$

eine Umsetzung, welche nur cyklische Factoren mit gerader Zeigeranzahl enthält und aus welcher die Reihen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ ebenso hervorgehen, wie die Reihen (5.) und (6.) aus der Umsetzung (4.). Würde man dagegen von demjenigen Zeigerpaare ausgegangen sein, welches in der Reihe $\mathfrak{R}'$ den Zeiger Eins enthält, so würde man durch dasselbe Verfahren genau zu der Umkehrung

$$(8.)\quad \begin{pmatrix} l \dots 1, & l' \dots f', \dots \\ 1 \dots g, & f' \dots g', \dots \end{pmatrix}$$

der Umsetzung (7.) gelangen. Hienach entspringen also alle Combinationen $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ zweier identischer Reihen von Zeigerpaaren aus den Umsetzungen, welche aus zweigliedrigen cyklischen Factoren bestehen und zwar jede dieser Combinationen nur aus einer derartigen Umsetzung, weil in diesem Falle die Umsetzungen (7.) und (8.) identisch sind. Die Combinationen $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ zweier verschiedener Zeigerpaarreihen aus Ω dagegen gehen aus den Umsetzungen hervor, welche wenigstens einen cyklischen Factor mit mehr als zwei Zeigern enthalten und zwar entspringt jede dieser Combinationen genau aus zwei Umsetzungen, von denen die eine die Umkehrung der anderen ist, und welche aus diesem Grunde in dem vorliegenden Falle nie identisch sein können. Sind nun

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)$$
$$(\alpha'\beta')(\gamma'\delta')\dots(\mu'\nu')$$

die beiden Zeigerpaarreihen, welche aus der Umsetzung (4.) hervorgehen, und bezeichnet allgemein $\varepsilon_{\alpha\beta\dots\mu\nu}$ die positive oder negative Einheit, jenachdem die Umsetzung $\begin{pmatrix}\alpha\beta & \nu \\ 12 \dots & n\end{pmatrix}$ einer geraden oder ungeraden Anzahl auf einander folgender Vertauschungen zweier Zeiger gleichkommt, so ist das aus der Umsetzung (4.) entspringende Glied der Determinante D, unter m die Anzahl der cyklischen Factoren dieser Umsetzung verstanden,

$$(-1)^m a_{1g} a_{gh} \dots a_{l1} a_{f'g'} \dots a_{l'f'} \dots$$

und lässt sich mit Hülfe der Gleichungen

$$\mathfrak{z}_{1gh\ldots lf'\ldots l'\ldots} \times \mathfrak{z}_{gh\ldots 1g'\ldots f'\ldots} = (-1)^m,$$

$$\mathfrak{z}_{1gh\ldots lf'\ldots l'\ldots}\, a_{1g} \ldots a_{f'g'} \ldots = \mathfrak{z}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\mu\nu}\, a_{\sigma\beta}\, a_{\gamma\delta} \ldots a_{\mu\nu}\,,$$

$$\mathfrak{z}_{gh\ldots 1g'\ldots f'\ldots}\, a_{gh} \ldots a_{l'f'} \ldots = \mathfrak{z}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots\mu'\nu'}\, a_{\alpha'\beta'}\, a_{\gamma'\delta'} \ldots a_{\mu'\nu'}\,,$$

auf die Form

$$\mathfrak{z}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\mu\nu}\, a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta} \ldots a_{\mu\nu} \times \mathfrak{z}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots\mu'\nu'}\, a_{\alpha'\beta'}\, a_{\gamma'\delta'} \ldots a_{\mu'\nu'}$$

bringen. Die Summe der aus sämmtlichen Umsetzungen, welche nur cyklische Factoren mit gerader Zeigeranzahl enthalten, entspringenden Glieder der Determinante D ist demnach

$$= \{\Sigma \mathfrak{z}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\mu\nu}\, a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta} \ldots a_{\mu\nu}\}^2$$

wo die Summe über alle Zeigerpaarreihen von Ω zu erstrecken ist.

Da also nur diejenigen Glieder der Determinante D in Betracht kommen, welche den unter C) genannten Umsetzungen entsprechen, so hat man

$$D = \{\Sigma \mathfrak{z}_{\alpha\beta\gamma\delta\ldots\mu\nu}\, a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta} \ldots a_{\mu\nu}\}^2.$$

Gräfenberg, August 1876.

Ueber *Borchardts* Function.

(Von Herrn *Kostka* in Insterburg.)

---

1. ***Allgemeine Formeln.*** *Borchardts* erzeugende Function aller ganzen symmetrischen Verbindungen ist ursprünglich in folgender Form gegeben:

$$(1.)\qquad \Theta(t_1, t_2, \dots t_n) = (-1)^n \frac{f(t_1)f(t_2)\dots f(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \dots t_n)} \cdot \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \frac{\partial}{\partial t_n} \frac{\Pi(t_1, t_2, \dots t_n)}{f(t_1)f(t_2)\dots f(t_n)};$$

darin bedeutet $f(t)$ eine ganze Function n^{ten} Grades und $\Pi(t_1, \dots t_n)$ das Differenzenproduct der t, also:

$$(1^a.)\qquad \begin{cases} f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n, \\ \Pi(t_1, \dots t_n) = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)\dots(t_n - t_{n-1}) = \Sigma \pm t_1^0 t_2^1 \dots t_n^{n-1}. \end{cases}$$

Geeigneter für die weitere Entwickelung wird eine andere Form von Θ sein, welche man z. B. in *Baltzers* Determinanten angegeben findet *): Schreibt man nämlich die zu differentiirende Function als Determinante, führt dann die Differentiationen aus und setzt

$$(2.)\qquad F_h(t) = t^h f'(t) - h . t^{h-1} f(t),$$

so wird

$$(2^a.)\qquad \Theta = \frac{1}{f(t_1)\dots f(t_n)} \cdot \frac{\Sigma \pm F_0(t_1) F_1(t_2) \dots F_{n-1}(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \dots t_n)}.$$

Der zweite Factor ist eine ganze und symmetrische Function der t, für alle Variablen zusammen von der Dimension $n(n-1)$, für jede einzelne Variable vom Grade $n-1$. Nach einer Aeusserung *Cayleys* **), auf welche neulich Herr *Faà de Bruno* zurückgekommen ist ***), würde es von Interesse sein, den Zähler der *Borchardt*schen Function, also

$$(3.)\qquad Z = \frac{\Sigma \pm F_0(t_1) F_1(t_2) \dots F_{n-1}(t_n)}{\Pi(t_1, t_2, \dots t_n)}$$

durch die Coefficienten von $f(t)$ und einfache symmetrische Verbindungen der t auszudrücken. Herr Professor *Borchardt* machte mich darauf aufmerksam

---

*) In der zweiten Auflage §. 3, 15.

**) A memoir on the symmetric functions of the roots of an equation, Phil. Transact. 1857, S. 489 ff.

***) Dieses Journal, Bd. 81, S. 217 ff.

dass Z als Summe der in diesem Journal Bd. 81 S. 281 ff. von mir behandelten Functionen darstellbar sei, und forderte mich auf, dies weiter zu verfolgen; diese Aufforderung ist zu den nachstehenden Entwickelungen die Veranlassung gewesen.

Es sei, etwas allgemeiner,

$$(4.)\qquad F_h(t) = b_{h,0}+b_{h,1}t+b_{h,2}t^2+\cdots+b_{h,m}t^m,$$

und wenn m den Exponenten der höchsten in den Functionen $F_h(t)$ vorkommenden Potenz von t bezeichnet, $m>n$; für den Fall der *Borchardt*schen Function würde sein:

$$(4^a.)\qquad b_{h,x} = (x+1-2h)a_{x+1-h} \quad \text{und} \quad m = 2n-2,$$

wobei, wie immer, jedes a mit einem Index, der <0 oder $>n$, gleich Null zu setzen ist. Die Multiplicationsregel der Determinanten liefert

$$(5.)\qquad Z = \Sigma \begin{vmatrix} b_{0,\alpha_0} & b_{1,\alpha_0} & \cdots & b_{n-1,\alpha_0} \\ b_{0,\alpha_1} & b_{1,\alpha_1} & \cdots & b_{n-1,\alpha_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{0,\alpha_{n-1}} & b_{1,\alpha_{n-1}} & \cdots & b_{n-1,\alpha_{n-1}} \end{vmatrix} \cdot \frac{\Sigma \pm t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_{n-1}}}{\Pi(t_1, t_2, \dots t_n)},$$

wobei

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots\ \alpha_{n-1}$$

irgend eine nach der Grösse aufsteigend geordnete Combination von n Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, ... m bedeutet und die Summe sich auf alle verschiedenen derartigen Combinationen ohne Wiederholung bezieht. Der zweite Factor in irgend einem Gliede der vorstehenden Summe ist als ganze Function der t leicht auszudrücken: Bildet man

$$(6.)\qquad \varphi(t) = (t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_n) = t^n - c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n c_n,$$

so wird, wie in diesem Journal Bd. 81 S. 281 f. gezeigt ist:

$$\frac{\Sigma \pm t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_{n-1}}}{\Pi(t_1, t_2, \dots t_n)}$$

$$(-1)^{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} (-1)^{n-\beta_1}.c_{n-\beta_1} & (-1)^{n-\beta_1+1}.c_{n-\beta_1+1} & \cdots & (-1)^{m-\beta_1}.c_{m-\beta_1} \\ (-1)^{n-\beta_2}.c_{n-\beta_2} & (-1)^{n-\beta_2+1}.c_{n-\beta_2+1} & \cdots & (-1)^{m-\beta_2}.c_{m-\beta_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{n-\beta_{m+1-n}}.c_{n-\beta_{m+1-n}} & (-1)^{n-\beta_{m+1-n}+1}.c_{n-\beta_{m+1-n}+1} & \cdots & (-1)^{m-\beta_{m+1-n}}.c_{m-\beta_{m+1-n}} \end{vmatrix},$$

wobei

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ \beta_{m+1-n}$$

diejenigen nach der Grösse aufsteigend geordneten ganzen Zahlen sind, welche mit $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots\ \alpha_{n-1}$ zusammen die Zahlenreihe 0, 1, 2, ... m einfach

ausfüllen; wobei ferner

$$c_0 = 1 \quad \text{und} \quad c_{-h} = c_{n+h} = 0$$

ist für jede ganze positive Zahl h. Multiplicirt man noch die Zeilen der aus den c zusammengesetzten Determinante der Reihe nach mit

$$(-1)^{n-\beta_1}, \ (-1)^{n-\beta_2}, \ \ldots \ (-1)^{n-\beta_{m+1-n}}$$

und die Colonnen der Reihe nach mit

$$(-1)^0, \ (-1)^1, \ \ldots \ (-1)^{m-n},$$

so erhält man, weil

$$(8.) \qquad \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{m+1-n} = \frac{m(m+1)}{2},$$

sowohl vor der Determinante als in jedem Gliede derselben das positive Vorzeichen.

Determinanten aus den Combinationen der t, bei welchen der Uebergang von einer Colonne zur nächstfolgenden durch *Vermehrung* des Index jedes c um eine bestimmte (nicht nothwendig für jede Colonne gleiche) Zahl, der Uebergang von einer Zeile zur nächsten durch *Verminderung* des Index um eine bestimmte Zahl vermittelt wird, kommen im Folgenden häufig vor, und es erscheint für diese Functionen, — die ich gelegentlich kurz c–Functionen nennen werde —, eine abkürzende Bezeichnung vortheilhaft; ich setze

$$(9.) \qquad \begin{vmatrix} c_{\lambda_0} & c_{\lambda_1} & c_{\lambda_2} & \cdots \\ c_{\lambda_0-\delta_1} & c_{\lambda_1-\delta_1} & c_{\lambda_2-\delta_1} & \cdots \\ c_{\lambda_0-\delta_2} & c_{\lambda_1-\delta_2} & c_{\lambda_2-\delta_2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = C_{\begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots \\ 0, & \delta_1, & \delta_2, & \ldots \end{vmatrix}};$$

die Subtraction von je zwei untereinanderstehenden Indices giebt also den Index des betreffenden Elements der Diagonale. Jede solche c–Function ist eine *symmetrische* Function der t, denn die c sind es; sie ist auch eine *homogene* Function der t von der Dimension

$$\lambda_0+(\lambda_1-\delta_1)+(\lambda_2-\delta_2)+\cdots,$$

wie man sich in bekannter Weise leicht überzeugt.

Wenn ausserdem noch

$$(10.) \qquad \Sigma \pm b_{0,\alpha_0} b_{1,\alpha_1} \ldots b_{n-1,\alpha_{n-1}} = B_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}},$$

so erhält die zu untersuchende Function die definitive Gestalt

$$(\text{I.}) \qquad Z = \Sigma B_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}} . C_{\begin{vmatrix} n-\beta_1, & n-\beta_1+1, & \ldots & m-\beta_1 \\ 0, & \beta_2-\beta_1, & \ldots & \beta_{m+1-n}-\beta_1 \end{vmatrix}}.$$

Dieselbe soll verglichen werden mit der Form

$$\text{(II.)} \qquad Z = \Sigma A_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}} T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}},$$

in welcher

$$T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}} = \Sigma t_1^{\gamma_0} t_2^{\gamma_1} \dots t_n^{\gamma_{n-1}}$$

eine Summe bedeutet, deren Glieder aus $t_1^{\gamma_0} t_2^{\gamma_1} \dots t_n^{\gamma_{n-1}}$ durch die verschiedenen Permutationen der Exponenten γ entstehen, und A der zugehörige Factor sein soll, also eine ganze Function der a, resp. im allgemeineren Falle der b.

Die Anzahl der Glieder in (I.) ist, da für die α alle verschiedenen Combinationen der Zahlen 0, 1, ... m zu je n zu nehmen sind,

$$\frac{(m+1)m(m-1)\dots(m-n+2)}{1.2.3\dots n};$$

ebenso gross ist die Anzahl der Glieder in (II.); denn der höchste Exponent, den in Z irgend ein t haben kann, ist $m-n+1$, und es werden daher so viele Glieder in (II.) vorhanden sein, als man die Zahlen 0, 1, ... $m-n+1$ mit Wiederholung zur n^{ten} Classe combiniren kann.

Jedes C sowohl, wie jedes T ist eine symmetrische und homogene Function der t. Für eine bestimmte Combination der α ist die Dimension der zugehörigen Function C

$$(n-\beta_1)+(n-\beta_2+1)+\dots+(m-\beta_{m+1-n})$$

oder wegen (8.)

$$\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}.$$

In (I.) wird also der Theil von der Dimension μ von allen Gliedern gebildet, für welche

$$\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1} = \mu+\frac{n(n-1)}{2}$$

ist. In (II.) giebt es soviel Glieder von der Dimension μ, als man die Zahlen 0, 1, 2, ... $m-n+1$ mit Wiederholung zur Summe μ combiniren kann: beide Ausdrücke (I.) und (II.) enthalten demnach die *gleiche* Anzahl Glieder von der Dimension μ *).

Im besonderen Fall von *Borchardts* Function ist in allen voraufgehenden Formeln $2n-2$ statt m zu setzen, und jedes C ist eine Determinante vom Grade $n-1$.

---

*) *Euler*, Introductio cap. XVI §. 315. Einen einfachen Beweis dieser Behauptung kann man auch entnehmen aus *Serret*, cours d'algèbre supérieure t. I, no. 65 (in der Uebers. v. *Wertheim*, Leipzig 1868, S. 118).

2. *Die Functionen C.* Um die Form (I.) von Z in (II.) überzuführen, haben wir irgend eine c-Function in ein Aggregat von Gliedern der Form

$$N_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}}\cdot T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}}$$

zu verwandeln, wo N ein reiner Zahlenfactor. Weil

$$C\begin{vmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2, & \dots\\ 0, & \delta_1, & \delta_2, & \dots\end{vmatrix}$$

eine homogene Function der t ist, folgt

$$(11.)\qquad N_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}} = \frac{1}{\gamma_0!\gamma_1!\dots\gamma_{n-1}!}\left|\frac{\partial^{\gamma_0+\gamma_1+\dots+\gamma_{n-1}}C}{\partial t_1^{\gamma_0}\partial t_2^{\gamma_1}\dots\partial t_n^{\gamma_{n-1}}}\right|_{t_1=0,t_2=0,\dots t_n=0},$$

wobei natürlich, falls irgend ein γ Null, der Ausdruck

$$\gamma! = 1.2.3\dots\gamma$$

gleich 1 zu setzen wäre.

Die mehrfachen Differentiationen der Determinante C, die wir colonnenweise vornehmen wollen, lassen sich in unserem Falle recht einfach ausführen; denn da jedes c eine *lineare* Function von jedem einzelnen t ist, darf keine Colonne mehr als einmal nach demselben t differentiirt werden — anderenfalls würde ja das betreffende Glied des Differentialquotienten den Werth Null haben, weil alle Elemente einer Colonne verschwinden —: Man erhält demnach, wenn man γ_0-mal nach t_1 differentiirt hat, eine Summe von Determinanten, in deren jeder γ_0 Colonnen einer einmaligen Differentiation unterzogen sind; und zwar kommt jede Determinante, in welcher *bestimmte* γ_0 Colonnen differentiirt sind, genau $\gamma_0!$-mal als Summand vor. Bezeichnet man nun mit

$$c_h^{(x)}$$

die Summe der Combinationen von

$$t_{x+1},\ t_{x+2},\ \dots\ t_n\quad \text{(also } ohne\ t_1,\ t_2,\ \dots\ t_x\text{)}$$

ohne Wiederholung zur h^{ten} Classe, so kann, weil

$$\frac{\partial c_h}{\partial t_1} = c'_{h-1}\quad\text{und}\quad c'_n = 0$$

ist, gefolgert werden: Wenn die γ_0-fache Differentiation von C nach t_1 ausgeführt und $t_1 = 0$ gesetzt ist, so besteht

$$\frac{1}{\gamma_0!}\left|\frac{\partial^{\gamma_0}C}{\partial t_1^{\gamma_0}}\right|_{t_1=0}$$

aus einer Summe von Determinanten

$$C'\begin{vmatrix}\lambda'_0, & \lambda'_1, & \lambda'_2, & \dots\\ 0, & \delta_1, & \delta_2, & \dots\end{vmatrix},$$

die ganz ähnlich aus den c' gebaut sind wie C aus den c; in allen diesen Determinanten sind die Zahlen $0, \delta_1, \delta_2, \ldots$ dieselben wie in C, dagegen sind je γ_0 von den Zahlen $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$ um Eins kleiner als die entsprechenden Zahlen λ; jede so gebildete Zahlenreihe $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$, welche nicht gleiche Zahlen in sich enthält, liefert ein Glied der in Rede stehenden Summe.

Die Fortsetzung dieses Verfahrens für die übrigen Variablen giebt uns schliesslich für $N_{\gamma_0,\gamma_1,\ldots\gamma_{n-1}}$ ein Aggregat von Determinanten, deren jede aus Elementen Eins und Null gebildet ist; und zwar steht eine Eins überall da, wo nach der letzten Differentiation c_0 (eigentlich $c_0^{(n)}$) sich ergab, an jeder anderen Stelle steht Null. Keine Colonne, keine Zeile kann mehr als eine Eins enthalten: daher muss jede derartige Determinante den Werth 1, 0 oder -1 haben.

Aber es gilt der Satz:

(12.) „C ist identisch Null, wenn irgend ein λ kleiner als das zugehörige δ; ferner nimmt jedes C, falls alle t verschwinden, den Werth Null an, wenn irgend ein λ grösser als das betreffende δ, dagegen den Werth Eins, wenn jedes λ gleich δ." ($\delta_0 = 0$ eingeschlossen.)

Denn es sei $\lambda_h < \delta_h$: dann sind die Indices der Elemente, welche in den $h+1$ ersten Colonnen die $(h+1)^{\text{te}}$ und die folgenden Stellen einnehmen, sämmtlich negativ; diese Elemente verschwinden und die Determinante ebenfalls. Ferner sei $\lambda_h > \delta_h$: dann sind die Indices aller Elemente, welche in den $h+1$ ersten Zeilen die $(h+1)^{\text{te}}$ und die folgenden Stellen einnehmen, grösser als Null und diese Elemente verschwinden also, falls sämmtliche t Null werden: somit verschwindet auch die Determinante. Ist dagegen jedes $\lambda_h = \delta_h$, so reducirt sich die Determinante auf das Anfangsglied und hat daher den Werth Eins.

Hienach resultirt zur Bestimmung von $N_{\gamma_0,\gamma_1,\ldots\gamma_{n-1}}$ die Regel:

(13.) „Unter den Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ vermindere man auf alle möglichen Arten je γ_0 um eine Einheit und unterdrücke alle Resultate, die entweder gleiche Zahlen in sich enthalten oder bei denen irgend ein λ kleiner ist als das betreffende δ; in jeder der übrig gebliebenen Zahlenreihen vermindere man wieder je γ_1 Zahlen um eine Einheit auf jede mögliche Art und lasse abermals jene unbrauchbaren Resultate fort; wenn man dieses Verfahren fortsetzt, bis alle

γ berücksichtigt sind, so ist die Anzahl der brauchbaren Schlussresultate gleich der Zahl $N_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}}$."

Im Allgemeinen wird es vortheilhaft sein, die Operation mit dem grösseren γ stets zuerst auszuführen. —

Specialfälle der c-Functionen sind die Combinationen der c, welche in der oben angeführten Abhandlung *Cayleys* betrachtet werden*); namentlich erweisen sich drei dort angeführte Sätze**) als allgemeine Eigenschaften aller c-Functionen. Denkt man sich nämlich in jedem $T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}}$ die Indices nach der Grösse absteigend geordnet und stellt man in der Entwicklung von

$$C\begin{vmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2 & \dots\\ 0, & \delta_1, & \delta_2 & \dots\end{vmatrix}$$

nach den Functionen T immer die T mit grösserem γ_0, unter denselben wieder diejenigen mit grösserem γ_1 voran u. s. w., so hat man als einfache Zusätze zu (13.):

(13[a].) Die Anzahl der γ muss mindestens ebenso gross sein als die grösste unter den Differenzen $\lambda-\delta$, und die Anzahl der von Null verschiedenen Differenzen $\lambda-\delta$ muss mindestens gleich γ_0 sein, wenn das betreffende T in der Entwicklung von C vorkommen soll.

(13[b].) Schreibt man in eine Zeile λ_0-mal die Zahl 1, in eine zweite Zeile $\lambda_1-\delta_1$, in eine dritte $\lambda_2-\delta_2$ Einheiten u. s. w., und zwar, von der ersten 1 beginnend, stets der Reihe nach 1 unter 1, soweit es angeht, und addirt man sodann colonnenweise, so geben die Summen der einzelnen Colonnen die Indices γ_0, γ_1, ... γ_{n-1} des *Anfangsgliedes* in der Entwicklung von C an.

(13[c].) Der Zahlenfactor dieses Anfangsgliedes ist der Einheit gleich.

Analog (13[b].) könnte man die Aufsuchung von $N_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}}$ im allgemeinen Falle auf Permutations- und Combinationsaufgaben zurückführen. —

In dem Falle der *Borchardt*schen Function kommen in der Form (I.) von Z nur solche C vor, bei welchen je zwei aufeinanderfolgende λ sich um Eins unterscheiden. Hieraus folgt z. B., dass in der Reihe der Zahlen

---

*) Für die wirkliche Entwicklung solcher Combinationen der c in Aggregate der T ist es indessen geschickter, sie nicht in Determinantenform zu schreiben, sondern direct die Reihe der Indices nach den Vorschriften von (13.) zu behandeln, ohne jedoch irgend ein Resultat als unbrauchbar fortzulassen: hiedurch kann man jede Zahl, die man aus *Cayleys* Tafeln zu entnehmen wünscht, auf sehr einfache Art prüfen.

**) First Restriction p. 490, Theorem und Second Restriction p. 491.

λ_0, $\lambda_1-\delta_1$, $\lambda_2-\delta_2$, ... nie eine kleinere der grösseren voraufgehen kann; ferner dass nach der ersten (γ_0-fachen) Differentiation stets nur *eine* Determinante übrig bleibt. Ausserdem erwähne ich für diesen Fall noch die folgenden Zusätze zu (13.):

(13^d.) „Es ist

$$C\begin{vmatrix}\lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \dots & \lambda+h-1, & \lambda+h, & \dots \\ 0, & \lambda, & \lambda+1, & \dots & \lambda+h-2, & \lambda+h, & \dots\end{vmatrix} = \Sigma\frac{(i-1)!}{(\lambda-1)!(i-\lambda)!}T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{i-1}},$$

falls i die Zahl der von Null verschiedenen Indices γ bedeutet. Der Zahlenfactor ist Eins, wenn $\lambda=1$ oder $i=\lambda$."

Der Beweis kann durch Differentiation geführt werden: Wir sehen nämlich, dass jede der Zahlen $\lambda+1$, $\lambda+2$, ... $\lambda+h-1$ nur um *eine* Einheit zu verringern ist und dass keine von ihnen früher um diese Einheit vermindert werden darf, ehe nicht dasselbe bei *allen* voraufgehenden geschehen ist; daher kommt es nur auf den Werth des ersten Index an und, indem wir auch nur diesen hinschreiben, erhalten wir nach $\varkappa$-facher Differentiation den Ausdruck:

$$C_{\lambda-\varkappa}^{(\varkappa)}+(\varkappa-1).C_{\lambda-\varkappa+1}^{(\varkappa)}+\frac{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}{1.2}C_{\lambda-\varkappa+2}^{(\varkappa)}+\dots+C_{\lambda-1}^{(\varkappa)},$$

und nach i-facher Differentiation verschwinden hierin nach (12.) alle Glieder, bei denen dieser erste Index nicht Null ist, und das eine C, in welchem er Null ist, wird Eins: Somit hat in der That $T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{i-1}}$ jenen Factor $\frac{(i-1)!}{(\lambda-1)!(i-\lambda)!}$.

Dasselbe könnte man durch eine zu (13^b.) analoge Betrachtung finden. Schreibt man nämlich in irgend welcher Reihenfolge in die erste Zeile λ Einheiten und $i-\lambda$ Nullen, in jede der folgenden je eine 1 und $i-1$ Nullen, so wird zu untersuchen sein, auf wievielfache Art diese Zahlen so angeordnet werden können, dass die Summen der einzelnen Colonnen der Reihe nach die Zahlen γ_0, γ_1, ... γ_{i-1} ergeben. Dabei ist indessen (damit nicht einige C mit gleichen Colonnen berücksichtigt werden) die folgende Beschränkung zu beachten: Theilt man durch einen vertikalen Strich eine beliebige, für jede Zeile gleiche Anzahl von Stellen ab, so darf in keiner Zeile links von diesem Strich eine geringere Anzahl von Einheiten sich befinden als in irgend einer der folgenden Zeilen. Demnach muss die erste Zeile mit 1 beginnen, die übrigen $i-1$ Zahlen können beliebig permutirt werden; für die folgenden Zeilen ist aber die Anordnung eindeutig durch die der ersten Zeile bedingt; denn zunächst müssen alle folgen, die

mit 1, 0, 0, ... beginnen, dann alle, die mit 0, 1, 0, ..., dann diejenigen, die mit 0, 0, 1, ... anfangen, u. s. w. Die gesuchte Zahl N ist daher der Anzahl jener Permutationen gleich, d. h. $=\frac{(i-1)!}{(\lambda-1)!(i-\lambda)!}$.

(13ᵉ.) „Unter der Voraussetzung, dass jedes von Null verschiedene γ ***grösser als eins*** ist, hat die Function $T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{i-1}}$ in der Entwicklung von

$$C\begin{vmatrix}\lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \dots \\ 0, & \lambda-\delta, & \lambda+1, & \dots\end{vmatrix}$$

zum Coefficienten die Zahl

$$\frac{i!(i-1)!(\lambda-\delta)}{\lambda!(i-\lambda)!\,\delta!(i-\delta)!}.$$

Unter der Voraussetzung, dass jedes von Null verschiedene γ ***grösser als zwei*** ist, hat die Function $T_{\gamma_0,\dots\gamma_{i-1}}$ in der Entwicklung von

$$C\begin{vmatrix}\lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \lambda+3, & \dots \\ 0, & \lambda-\delta, & \lambda-\varepsilon, & \lambda+2, & \dots\end{vmatrix}$$

zum Coefficienten die Zahl

$$\frac{(i+1)!i!(i-1)!(\lambda-\delta)(\lambda-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)}{(\lambda+1)!(i-\lambda)!(\delta+1)!(i-\delta)!(\varepsilon+1)!(i-\varepsilon)!} \quad \text{u. s. w.“}$$

(13ᶠ.) „Die Berechnung aller Zahlenfactoren in der Entwicklung von c-Functionen der vorgenannten Form lässt sich auf jene einfachsten Fälle zurückführen.“

Die Beweise könnten wohl auch durch Differentiation geführt werden; schneller indessen führt folgende Ueberlegung zum Ziel: Es ist

$$C\begin{vmatrix}\lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \dots \\ 0, & \lambda-\delta, & \lambda+1, & \dots\end{vmatrix} = c_\lambda . C\begin{vmatrix}\delta+1, & \delta+2, & \dots \\ 0, & \delta+1, & \dots\end{vmatrix} - c_\delta . C\begin{vmatrix}\lambda+1, & \lambda+2, & \dots \\ 0, & \lambda+1, & \dots\end{vmatrix}.$$

Nun sei für irgend eine Function T, welche nach den früheren Regeln in C vorkommen kann, i die Anzahl der von Null verschiedenen Indices, i_1 die Zahl derjenigen unter ihnen, die grösser als Eins sind. Denken wir uns

$$C\begin{vmatrix}\delta+1, & \delta+2, & \dots \\ 0, & \delta+1, & \dots\end{vmatrix}$$

vollständig in Glieder von der Form $N.t_1^{\gamma_0}t_2^{\gamma_1}\dots t_n^{\gamma_{n-1}}$ aufgelöst (also nicht die Functionen T zusammengefasst), so hat jedes dieser Glieder einen Zahlenfactor, der nach (13ᵈ.) allein von der Anzahl der von Null verschiedenen Exponenten abhängt. Um zu erfahren, welche Summanden aus dieser Reihe

in dem Product

$$c_\lambda . C \begin{vmatrix} \delta+1, & \delta+2, & \dots \\ 0, & \delta+1, & \dots \end{vmatrix}$$

zu einem ***bestimmten*** Gliede $N . t_1^{\gamma_0} t_2^{\gamma_1} \dots t_{i_1}^{\gamma_{i_1-1}} t_{i_1+1}^{\gamma_{i_1}} \dots t_i^{\gamma_{i-1}}$ beitragen, ziehen wir von der Zahlenreihe $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{i_1-1}, \gamma_{i_1}, \dots \gamma_{i-1}$ (absteigend geordnet) eine andere ab, welche λ Einheiten und $i-\lambda$ Nullen in irgend einer Reihenfolge enthält; jede ***neue*** Reihenfolge führt auf einen ***neuen*** Summanden von C, welcher in jenem Producte zu dem in Rede stehenden Gliede beiträgt, und haben wir ***alle*** verschiedenen Reihenfolgen berücksichtigt, so kennen wir auch ***alle*** Glieder, die einen Beitrag liefern können. Sind nun z. B. $\lambda-h$ Einheiten von den ersten i_1 Zahlen abgezogen, so bleiben also h Einheiten von den $i-i_1$ übrigen abzuziehen, und die nach der Subtraction entstandene Zahlenreihe enthält $i-h$ nicht verschwindende Indices. Bezeichnen wir mit p_h den Binomialcoefficienten $\frac{p(p-1)\dots(p-h+1)}{1.2\dots h}$ und setzen fest, dass $p_0 = 1$ sein soll, auch wenn $p = 0$ ist, und dass $p_h = 0$ für ein negatives h, so folgt wegen der Symmetrie der hier betrachteten Functionen aus den voraufgehenden Bemerkungen: In der Entwicklung von

$$C \begin{vmatrix} \lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \dots \\ 0, & \lambda-\delta, & \lambda+1, & \dots \end{vmatrix}$$

ist der Zahlenfactor

$$N_{\gamma_0, \dots \gamma_{i_1-1}, \gamma_{i_1}, \dots \gamma_{i-1}} = \sum_0^\lambda {}_h (i-i_1)_h \begin{vmatrix} (i_1)_{\lambda-h} & (i-1-h)_\lambda \\ (i_1)_{\delta-h} & (i-1-h)_\delta \end{vmatrix}.$$

Entsprechende Betrachtungen führen auch zu allgemeinen Ausdrücken für irgend einen Zahlenfactor N in der Entwicklung von

$$C \begin{vmatrix} \lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \lambda+3, & \dots \\ 0, & \lambda-\delta, & \lambda-\varepsilon, & \lambda+2, & \dots \end{vmatrix};$$

doch resultiren hier noch weit complicirtere Formeln: jedenfalls indessen lässt sich auf diesem Wege der Fall, dass z. B. h Elemente der Diagonalreihe von C einen Index haben, der grösser als eins, vollständig erledigen, sobald die voraufgehenden — wo die Anzahl solcher Elemente $h-1$, $h-2, \dots 2, 1$ beträgt — absolvirt sind.

Tritt in der letzten Gleichung die Annahme hinzu, ***dass*** $i_1 = i$, so wird

$$N_{\gamma_0 \; \gamma_{i-1}} = \begin{vmatrix} i_\lambda & (i-1)_\lambda \\ i_\delta & (i-1)_\delta \end{vmatrix} = \frac{i!(i-1)!(\lambda-\delta)}{\lambda!(i-\lambda)!\,\delta!(i-\delta)!}.$$

Ferner wird in der Entwicklung von

$$C\begin{vmatrix}\lambda, & \lambda+1, & \lambda+2, & \lambda+3, & \dots\\ 0, & \lambda-\delta, & \lambda-\varepsilon, & \lambda+2, & \dots\end{vmatrix}$$

der Zahlenfactor einer solchen Function T, deren Indices sämmtlich gröss als zwei sind, gleich

$$\begin{vmatrix} i_\lambda & i_{\lambda+1} & (i-1)_{\lambda+1}\\ i_\delta & i_{\delta+1} & (i-1)_{\delta+1}\\ i_\varepsilon & i_{\varepsilon+1} & (i-1)_{\varepsilon+1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(i+1)_{\lambda+1} & i_{\lambda+1} & (i-1)_{\lambda+1}\\ (i+1)_{\delta+1} & i_{\delta+1} & (i-1)_{\delta+1}\\ (i+1)_{\varepsilon+1} & i_{\varepsilon+1} & (i-1)_{\varepsilon+1}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{(i+1)!\,i!\,(i-1)!}{(\lambda+1)!(i-\lambda)!(\delta+1)!(i-\delta)!(\varepsilon+1)!(i-\varepsilon)!}\cdot\begin{vmatrix}1 & -\lambda & \lambda^2\\ 1 & -\delta & \delta^2\\ 1 & -\varepsilon & \varepsilon^2\end{vmatrix}$$

$$= \frac{(i+1)!\,i!\,(i-1)!\,(\lambda-\delta)(\lambda-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)}{(\lambda+1)!(i-\lambda)!(\delta+1)!\,(i-\delta)!\,(\varepsilon+1)!\,(i-\varepsilon)!}.$$

Analoges folgt für die complicirteren Fälle.

Da somit der Versuch, den Zahlenfactor N wirklich als Functi der Indices γ auszudrücken, nur in wenigen Fällen zu Formeln führt, welc zur Berechnung geeignet sind, so wird als allgemeine, alle Fälle umfassen Regel (13.) festzuhalten sein: Die dort vorgeschriebenen Operationen si auch in praxi weit einfacher auszuführen, als es auf den ersten Anbli scheinen könnte, und jedenfalls führen sie bedeutend schneller zum Zi als die Entwicklung der Determinanten C auf gewöhnlichem Wege, weni stens sobald man nicht die *Cayley*schen Tafeln benutzen will oder kann.

Die hier angestellten Betrachtungen bilden die Ergänzung zu d Bd. 81. S. 284 angegebenen Regel, welche umgekehrt jedes T durch Functionen ausdrücken lehrt. —

Wenn wir die Form (I.) von Z in die Form (II.) vollständig umform wollen, müssen wir die vorhin dargelegte Rechnung für $\frac{(m+1)m\dots(m-n+}{1.2\dots n}$ Functionen C durchführen; eine bedeutende Vereinfachung erhalten wir ab durch den Satz:

(14.) „Wenn

$$C\begin{vmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \lambda_2, & \dots & \lambda_{\nu-1}\\ 0, & \delta_1, & \delta_2, & \dots & \delta_{\nu-1}\end{vmatrix} = \Sigma N_{\gamma_0\dots\gamma_{n-1}}\cdot T_{\gamma_0\dots\gamma_{n-1}}$$

ist, und man setzt

$$\left.\begin{aligned} n-\lambda_{\nu-h}+\delta_{\nu-1} &= \lambda'_{h-1}\\ \delta_{\nu-1}-\delta_{\nu-h} &= \delta'_{h-1}\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\text{für } h=1,\ 2,\ \dots\ \nu\\ &(\text{wie immer } \delta_0 = 0 = \delta'_0),\end{aligned}$$

so ist:

$$C_{\begin{vmatrix}\lambda'_0, & \lambda'_1, & \lambda'_2, & \dots & \lambda'_{\nu-1}\\ 0, & \delta'_1, & \delta'_2, & \dots & \delta'_{\nu-1}\end{vmatrix}} = \Sigma N_{\gamma_0,\dots\gamma_{n-1}}.T_{\nu-\gamma_{n-1},\nu-\gamma_{n-2},\dots\nu-\gamma_0};$$

die Zahlencoefficienten N sind in beiden Gleichungen dieselben."

Der Beweis ist leicht: Setzen wir für den Augenblick die Summe der Combinationen von $\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \dots \frac{1}{t_n}$ ohne Wiederholung zur h^{ten} Classe gleich c_h, nennen $\mathfrak{C}$ die Function, welche durch Substitution von $\frac{1}{t_1}$ für $t_1, \dots \frac{1}{t_n}$ für t_n aus C, und $\mathfrak{T}$ diejenige, welche durch die gleiche Substitution aus T entsteht, so ist

$$\mathfrak{C}_{\begin{vmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \dots & \lambda_{\nu-1}\\ 0, & \delta_1, & \dots & \delta_{\nu-1}\end{vmatrix}} = \Sigma N_{\gamma_0,\dots\gamma_{n-1}}.\mathfrak{T}_{\gamma_0,\dots\gamma_{n-1}}.$$

Nun ist aber

$$c_h = (t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}.c_{n-h};$$

ziehen wir also aus allen Zeilen von $\mathfrak{C}$ den Factor $(t_1 t_2 \dots t_n)^{-1}$ heraus, und schreiben die Determinante so um, dass die erste Zeile und die erste Colonne zur letzten, die zweite zur vorletzten u. s. w. wird, so folgt:

$$\begin{vmatrix} c_{n-\lambda_{\nu-1}+\delta_{\nu-1}} & c_{n-\lambda_{\nu-2}+\delta_{\nu-1}} & \dots & c_{n-\lambda_0+\delta_{\nu-1}}\\ c_{n-\lambda_{\nu-1}+\delta_{\nu-2}} & c_{n-\lambda_{\nu-2}+\delta_{\nu-2}} & \dots & c_{n-\lambda_0+\delta_{\nu-2}}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n-\lambda_{\nu-1}+\delta_1} & c_{n-\lambda_{\nu-2}+\delta_1} & \dots & c_{n-\lambda_0+\delta_1}\\ c_{n-\lambda_{\nu-1}} & c_{n-\lambda_{\nu-2}} & \dots & c_{n-\lambda_0}\end{vmatrix} = \Sigma N_{\gamma_0,\dots\gamma_{n-1}}.\mathfrak{T}_{\gamma_0,\dots\gamma_{n-1}}.(t_1 t_2 \dots t_n)^{\nu}.$$

Hieraus ist die obige Behauptung ersichtlich.

Speciell für den Fall der *Borchardt*schen Function ergiebt sich daraus: Die Entwickelung der C in Ausdrücke von der Form ΣNT giebt für die

$$0^{\text{te}},\ 1^{\text{te}},\ 2^{\text{te}},\ \dots\ \left(\frac{n(n-1)}{2}-1\right)^{\text{te}}$$

und resp. die

$$n(n-1)^{\text{te}},\ (n(n-1)-1)^{\text{te}},\ (n(n-1)-2)^{\text{te}},\ \dots\ \left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)^{\text{te}}$$

Dimension ganz entsprechende Resultate: Wenn nämlich der Factor von $B_{a_0,a_1,\dots a_{n-1}}$ den Werth hat

$$\Sigma N.T_{\gamma_0,\gamma_1,\dots\gamma_{n-1}},$$

so hat derjenige von $B_{2n-2-\alpha_{n-1},\,2n-2-\alpha_{n-2},\ldots 2n-2-\alpha_0}$ den Werth

$$\Sigma N.T_{n-1-\gamma_{n-1},\,n-1-\gamma_{n-2},\ldots n-1-\gamma_0},$$

wo die Zahlencoefficienten N in beiden Fällen dieselben sind. Bei den Ausdrücken von der $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Dimension können auch einzelne C aus anderen durch die eben besprochene Substitution hergeleitet werden, die meisten aber nicht, weil sie dadurch nur in sich selbst transformirt werden. — *Cayleys* Tafeln, die bis zur zehnten Dimension berechnet sind, würden demnach zur Entwickelung der *Borchardt*schen Function ausreichen, so lange $f(t)$ den fünften Grad nicht übersteigt.

3. *Berechnung der B. Schlussformel.* Für die Entwickelung von *Borchardts* Function wird noch die Auswerthung der B erfordert. Es ist also

$$(4^a.)\qquad m = 2n-2 \quad \text{und} \quad b_{h,x} = (x+1-2h)\,a_{x+1-h};$$

daher

$$(15.)\begin{cases} B_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_{n-1}} \\ = \begin{vmatrix} (\alpha_0+1)a_{\alpha_0+1} & (\alpha_0-1)a_{\alpha_0} & \ldots(\alpha_0+1-2h)\,a_{\alpha_0+1-h} & \ldots(\alpha_0-2n+3)\,a_{\alpha_0-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_{n-1}+1)\,a_{\alpha_{n-1}+1} & (\alpha_{n-1}-1)a_{\alpha_{n-1}} & \ldots(\alpha_{n-1}+1-2h)\,a_{\alpha_{n-1}+1-h} & \ldots(\alpha_{n-1}-2n+3)\,a_{\alpha_{n-1}-n+2} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Jedes B ist eine ganze Function der Coefficienten von $f(t)$, und falls man dieselbe in ein Aggregat von Gliedern der Form

$$(16.)\qquad M.a_0^{x_0}a_1^{x_1}\ldots a_n^{x_n}$$

entwickelt, wo M ein Zahlenfactor, so ist:

$$(16^a.)\begin{cases} x_0+x_1+\cdots+x_n = n, \\ \text{und} \\ 0.x_0+1.x_1+\cdots+n.x_n = \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+n-\frac{n(n-1)}{2}. \end{cases}$$

Auch lässt sich leicht darthun, dass x_n nie Null ist, d. h. dass jedes B den Factor a_n enthält. Man hat nämlich

$$(17.)\begin{cases} (\alpha+1)\,a_{\alpha+1}.a_0+(\alpha-1)\,a_\alpha.a_1+\cdots+(\alpha+1-2h)\,a_{\alpha+1-h}\,a_h+\cdots \\ \qquad\cdots+(\alpha+1-2n)\,a_{\alpha+1-n}.a_n = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 2n-2; \end{cases}$$

denn es ist

$$(17^a.)\qquad (\alpha+1-2h)\,a_{\alpha+1-h}.a_h+(\alpha+1-2h')\,a_{\alpha+1-h'}.a_{h'} = 0 \quad \text{falls} \quad h' = \alpha+1-h$$

und für jedes Glied auf der linken Seite von (17.), das nicht schon von selbst verschwindet wegen $a_{-h} = 0$, $a_{n+h} = 0$, findet sich daher ein ihm ent-

gegengesetzt gleiches. Multiplicirt man demnach in der Determinante (15.) z. B. die letzte Colonne mit a_{n-1} und addirt die resp. mit $a_{n-2}, a_{n-3}, \dots a_0$ multiplicirten voraufgehenden Colonnen dazu, so erhält in der so transformirten Determinante vom Werth $a_{n-1}.B$ irgend ein Element der letzten Colonne die Form $(2n-\alpha-1)a_{\alpha+1-n}.a_n$: also ist $\frac{a_{n-1}.B}{a_n}$ und daher auch $\frac{B}{a_n}$ eine ganze Function der a. — Die ganze Function $\frac{B}{a_n}$ ist ein Aggregat von Gliedern aus je $n-1$ Factoren a, deren Indices eine Summe genau gleich der Dimension der zugehörigen c-Function ergeben.

Kommt es darauf an, sämmtliche B in der Function Z in entwickelter Form durch die a darzustellen, so wird diese Rechnung wesentlich gekürzt durch den Satz:

(18.) „Wenn man bei *Borchardts* Function in dem Ausdruck

$$\frac{1}{a_n}.B_{\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}}$$

jedes a_h durch a_{n-h} ersetzt, so erhält man den Werth von

$$\frac{1}{a_n}.B_{2n-2-\alpha_{n-1},2n-2-\alpha_{n-2},\dots 2n-2-\alpha_0}."$$

Um denselben zu beweisen, sei

$$\frac{1}{a_n}B_{\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}} = \mathfrak{F}(a_0, a_1, \dots a_n);$$

dann ist, indem man gleichzeitig die Determinante n^{ten} in eine $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades verwandelt:

$$\mathfrak{F}(a_n, a_{n-1}, \dots a_0)$$
$$= \frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} (\alpha_0+1)a_{n-\alpha_0-1} & \dots(\alpha_0+1-2h)a_{n-\alpha_0+h-1} & \dots(\alpha_0+3-2n)a_{2n-2-\alpha_0} & (\alpha_0+1-2n)a_{2n-1-\alpha_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_{n-1}+1)a_{n-\alpha_{n-1}-1} & \dots(\alpha_{n-1}+1-2h)a_{n-\alpha_{n-1}+h-1} & \dots(\alpha_{n-1}+3-2n)a_{2n-2-\alpha_{n-1}} & (\alpha_{n-1}+1-2n)a_{2n-1-\alpha_{n-1}} \\ 0 & \dots\ 0 & \dots\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun die Colonnen der Reihe nach mit $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$ und addirt zur ersten alle folgenden, so wird:

$$\mathfrak{F}(a_n, a_{n-1}, \dots a_0)$$
$$= \frac{1}{a_0.a_n}\begin{vmatrix} \sigma_0 & (\alpha_0-1)a_{n-\alpha_0} & \dots(\alpha_0+3-2n)a_{2n-2-\alpha_0} & (\alpha_0+1-2n)a_{2n-1-\alpha_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n-1} & (\alpha_{n-1}-1)a_{n-\alpha_{n-1}} & \dots(\alpha_{n-1}+3-2n)a_{2n-2-\alpha_{n-1}} & (\alpha_{n-1}+1-2n)a_{2n-1-\alpha_{n-1}} \\ a_0 & 0 & \dots\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wobei

$$\sigma = (\alpha+1)a_{n-\alpha-1}.a_n+(\alpha-1)a_{n-\alpha}a_{n-1}+\cdots+(\alpha+1-2h)a_{n-\alpha+h-1}a_{n-h}+\cdots$$
$$\cdots+(\alpha+1-2n)a_{2n-1-\alpha}a_0.$$

Ebenso aber wie bei (17.) findet auch in diesem Ausdruck für σ jedes Glied, das nicht an sich Null ist, ein ihm entgegengesetzt gleiches, und die Determinante reducirt sich auf das Product von $(-1)^n a_0$ in eine Determinante vom n^{ten} Grade; kehrt man letztere um, so dass die letzte Zeile und Colonne zur ersten, die vorletzte zur zweiten u. s. w. wird, und multiplicirt man endlich jede Colonne mit -1, so erkennt man, dass in der That

$$\mathfrak{F}(a_n, a_{n-1}, \dots a_0) = \frac{1}{a_n} B_{2n-2-\alpha_{n-1}, 2n-2-\alpha_{n-2}, \dots 2n-2-\alpha_0},$$

wie behauptet wurde *).

Somit kennen wir (vergl. § 2) die ganze Entwicklung unserer Function Z in der Form (II.), sobald wir sie für die Theile von den niedrigsten Dimensionen bis einschliesslich der $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ oder für die von den höchsten Dimensionen, von der $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ aufwärts, gefunden haben. Die Grössen $\frac{B}{a_n}$, bei welchen die Summe der Indices in jedem Gliede gerade gleich $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, gehen, wenn jedes a_h durch a_{n-h} ersetzt wird, gegenseitig in einander über.

Mehrere B sind leicht in einfacherer Form anzugeben; ich erwähne namentlich

$$(19.)\qquad B_{\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{h-1},n+h-1,n+h,\dots 2n-2} = (n-h)!\,a_n^{n-h}.B_{\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_{h-1}},$$

woraus eine ähnliche Formel für solche B folgt, bei denen die Reihe der Indices mit 0, 1, 2, ... beginnt, z. B.

$$B_{0,1,2,\dots n-2,n+1} = (n-1)!(n-2)a_0^{n-2}a_2 a_n, \quad \text{u. s. w.}$$

Für die allgemeine Entwicklung von B lässt sich eine Controle durch ähnliche Betrachtungen angeben, wie sie in d. J. Bd. 81, S. 284 f. (§ 3 d. Abhdlg.)

---

*) Diese Eigenschaft von B könnte auch aus der andern Form der *Borchardt*schen Function geschlossen werden:

$$\Theta = \Sigma \frac{1}{(t_1-x_h)(t_2-x_i)\dots(t_n-x_p)}$$

(wo für $x_h, x_i, \dots x_p$ die verschiedenen Permutationen der Wurzeln von $f(t)=0$ zu setzen sind): man untersuche, was aus Θ wird, wenn jedes t und jedes x durch seinen reciproken Werth ersetzt wird, und nehme hinzu den am Schluss des § 2 erwiesenen Satz (14.).

angestellt sind. Durch die Zahlen $0, 1, \ldots n-1$ werden die Colonnen, durch $\alpha_0+1, \alpha_1+1, \ldots \alpha_{n-1}+1$ die Zeilen von B charakterisirt; durch Addition der Indices der a (in einer bestimmten Combination, die ein Glied der Determinante sein soll) müssen letztere aus ersteren entstehen. Seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$, aufsteigend geordnet, die Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots n-1$, welche nicht als Zeilenindices vorkommen, $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ (natürlich von gleicher Anzahl) die Zeilenindices, welche nicht in der Reihe $0, 1, \ldots n-1$ enthalten sind: dann müssen die η aus den ε durch Addition der von Null verschiedenen Indices der a entstehen. So oft dies bei bestimmten Indices der a geschehen kann, so oft kommt die betreffende Combination als Glied der Determinante vor; jede verschiedene Reihenfolge der Summanden einer Gruppe — (die h^{te} *Gruppe* hat zur Summe $\eta_h-\varepsilon_h$) — giebt eine neue Erzeugungsart, aber jede Gruppe ist abzuschliessen, sobald eine Zahl oberhalb $n-1$ durch Addition erreicht ist. Wenn nun auf eine dieser Arten aus der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n-1$$

die neue

$$\gamma',\ \gamma'',\ \gamma''',\ \ldots\ \gamma^{(n)}$$

hergeleitet ist, so enthalten die γ *alle* Zeilenindices und jedes γ ist aus der darüber stehenden Zahl durch Addition des Index irgend eines a entstanden, d. h. dieses a ist aus der Zeile entnommen, welche durch das betreffende γ, und aus der Colonne, welche durch die darüber stehende Zahl repräsentirt wird. Bezeichnet man nun mit ϱ die Anzahl der Inversionen der η, die doch in irgend einer Reihenfolge unter den γ vorkommen, und mit q die Anzahl der von Null verschiedenen Indices der a, so folgt genau wie a. a. O. und mit Beachtung des Baues der Determinante B, dass das betreffende Glied den Factor hat

$$(-1)^{p(n-1)+\frac{p(p+1)}{2}-(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p)-q+\varrho}.\gamma'(\gamma''-2)(\gamma'''-4)\ldots(\gamma^{(n)}-2n+2).$$

Indem man dann alle möglichen Arten berücksichtigt, wie bei denselben Indices die Reihe der η aus derjenigen der ε, resp. die Reihe der γ aus $0, 1, \ldots n-1$ entstehen kann, ergiebt sich der Zahlenfactor der betreffenden Combination der a in der Entwicklung der in Rede stehenden Determinante.

Zum Schluss gebe ich die Entwicklung von Z in der Form (II.) für die Glieder der fünf niedrigsten (also auch für die der fünf höchsten) Dimensionen*):

---

*) In den Formeln des Herrn *Faà de Bruno* (dieses Journal Bd. 81 S. 218) ist ein Druckfehler: für $n=2$ muss im Zähler von Θ das letzte Glied $2ac$ lauten.

$$\frac{Z}{a_n} = n!\,a_0^{n-1} + (n-1)!\,(n-1)a_0^{n-2}a_1.T_1 + (n-1)!\,(n-2)a_0^{n-2}a_2.T_2$$
$$+(n-2)!\,2a_0^{n-3}\left\{a_0a_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}a_1a_1\right\}T_{1,1}$$
$$+(n-1)!\,(n-3)\,a_0^{n-2}a_3.T_3 + (n-2)!\,a_0^{n-3}\{3a_0a_3 + (n-2)^2a_1a_2\}\,T_{2,1}$$
$$+(n-3)!\,3!\,a_0^{n-4}\left\{-a_0^2a_3 + (n-2)a_0a_1a_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}a_1^3\right\}T_{1,1,1}$$
$$+(n-1)!\,(n-4)a_0^{n-2}a_4.T_4 + (n-2)!\,2a_0^{n-3}\left\{2a_0a_4 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}a_1a_3\right\}T_{3,1}$$
$$+(n-2)!\,2a_0^{n-3}\left\{2a_0a_4 + a_1a_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}a_2^2\right\}T_{2,2}$$
$$+(n-3)!\,2a_0^{n-4}\left\{-4a_0^2a_4 + (3n-8)a_0a_1a_3 + (n-2)a_0a_2^2 + (n-2)\frac{(n-2)(n-3)}{2}a_1^2a_2\right\}T_{2,1,1}$$
$$+(n-4)!\,4!\,a_0^{n-5}\left\{a_0^3a_4 - (n-3)a_0^2a_1a_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}a_0a_1^2a_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}a_1^4\right\}T_{1,1,1,1}$$
$$+\text{etc.}$$

wobei, wie oben, dem Zeichen $i!$ für $i = 0$ der Werth Eins beizulegen ist.

Die Untersuchung hat nicht zu dem allgemeinen Bildungsgesetz der Form (II.) von Z geführt, sondern hat nur Regeln geliefert, welche für jeden gegebenen Fall die Rechnung übersichtlich gestalten lassen, und welche namentlich es möglich machen, den Factor einer bestimmten Function T im Werthe von Z ohne Kenntniss der übrigen Glieder zu ermitteln.

In der That aber erscheint die Form (I.), in welcher das Bildungsgesetz klar zu Tage tritt, für Betrachtungen von allgemeiner Natur geeigneter: die in ihr auftretenden Functionen C sind für weitere Rechnungen mindestens ebenso brauchbar als die Functionen T. Insbesondere gestaltet sich die Multiplication zweier c–Functionen weit einfacher als die zweier T; denn es ist

$$C\begin{vmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \dots & \lambda_{m-1}\\ 0, & \delta_1, & \dots & \delta_{m-1}\end{vmatrix} . C\begin{vmatrix}\mu_0, & \mu_1, & \dots & \mu_{p-1}\\ 0, & \varepsilon_1, & \dots & \varepsilon_{p-1}\end{vmatrix} = C\begin{vmatrix}\lambda_0, & \lambda_1, & \dots & \lambda_{m-1}, & \lambda_m, & \dots & \lambda_{m+p-1}\\ 0, & \delta_1, & \dots & \delta_{m-1}, & \delta_m, & \dots & \delta_{m+p-1}\end{vmatrix},$$

falls man setzt:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{m+h} &= n+1+\delta_{m-1}+\mu_h-\mu_0\\ \delta_{m+h} &= n+1+\delta_{m-1}+\varepsilon_h-\mu_0\end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad h = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ p-1 \quad (\varepsilon_0 = 0);$$

in der rechts stehenden Determinante verschwinden nämlich die p letzten Elemente der m ersten Zeilen.

Will man allerdings *Borchardts* Function Θ nach fallenden Potenzen der t entwickeln und einen bestimmten Coefficienten der Entwicklung

angeben, dann wird die Umformung von (I.) in (II.) nothwendig sein. Zur Ausführung einer solchen Entwicklung wird mit Vortheil die Gleichung

$$\frac{1}{f(t)} = \sum_0^\infty {}_h \frac{(-1)^h(n-1, n, \dots n+h-2)}{a_n^h t^{n+h}},$$

welche aus Bd. 81 dieses Journals S. 281 ff. sich ergiebt, zu verwerthen sein. Doch muss ich darauf verzichten, dies hier weiter zu verfolgen.

Insterburg, den 9. October 1876.

Ueber das *Pfaff*sche Problem.

(Von Herrn *Frobenius* in Zürich.)

Einleitung.

Das *Pfaff*sche Problem ist nach den Vorarbeiten *Jacobis* (dieses Journal Bd. 2, S. 347; Bd. 17, S. 128; Bd. 29, S. 236) hauptsächlich von Herrn *Natani* (dieses Journal Bd. 58, S. 301) und von *Clebsch* (dieses Journal Bd. 60, S. 193, Bd. 61, S. 146) zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gemacht worden. In seiner ersten Arbeit führt *Clebsch* die Lösung der Aufgabe auf die Integration mehrerer Systeme homogener linearer partieller Differentialgleichungen zurück mittelst einer indirecten Methode, von der er später (Bd. 61, S. 146) selbst sagt, dass sie nicht vollständig geeignet sei, die Natur der betreffenden Gleichungen ins rechte Licht zu setzen. Desshalb hat er in der zweiten Arbeit die Aufgabe auf einem andern directen Wege angegriffen, aber nur solche Differentialgleichungen

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_p\,dx_p = 0$$

behandelt, für welche die Determinante der Grössen

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$$

von Null verschieden ist.

Es scheint mir wünschenswerth, dass auch der allgemeinere Fall, in welchem diese Determinante nebst einer Anzahl ihrer partialen Determinanten verschwindet, durch eine ähnliche directe Methode erledigt werde, um so mehr, als ich für diesen Fall aus den citirten Arbeiten nicht die Ueberzeugung gewinnen kann, dass die für die Integration der *Pfaff*schen Differentialgleichung entwickelten Methoden wirklich zum Ziele führen müssen. (Vergl. § 22, Anm. I, § 23, Anm. I.). Unter der erwähnten Annahme kommt man gleich beim ersten Schritte zur Lösung des Problems nicht auf eine einzige, sondern auf ein System mehrerer homogener linearer partieller Differentialgleichungen. Ein solches muss aber gewissen Integrabilitätsbedingungen genügen, wenn es ein von einer Constanten verschiedenes Integral haben soll (Vgl. z. B. *Clebsch*, dieses Journal Bd. 65, S. 257). *Clebsch* sagt (Bd. 60, S. 196), in der *Natani*schen Arbeit sei nicht gezeigt worden, wie

man von den auftretenden simultanen Systemen ein Integral finden könne, ein Vorwurf, den er später (Bd. 61, S. 146, Anm.) wieder zurücknimmt. Ich vermisse aber bei beiden Autoren, falls die Determinante $|a_{\alpha\beta}|$ verschwindet, einen strengen Beweis für die Verträglichkeit der zu integrirenden partiellen Differentialgleichungen.

Clebsch unterscheidet bei dem *Pfaff*schen Problem zwei Fälle, welche er den *determinirten* und den *indeterminirten* nennt. Die Bedingungen für das Eintreten des ersteren sind von *Jacobi* (Bd. 29, S. 242) und von Herrn *Natani* (Bd. 58, S. 316) entwickelt worden. Die Kriterien aber, mit Hülfe deren man jene beiden Fälle von einander unterscheiden kann, hat *Clebsch* nicht richtig erkannt. Er scheint den Unterschied in Folgendem gesucht zu haben: Wenn in dem System $a_{\alpha\beta}$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich $2m$ ist (Bd. 60, S. 208), so tritt der determinirte Fall ein; wenn dieser Grad aber $2m+1$ ist (l. c. S. 218), der indeterminirte. Ich werde aber zeigen, dass in einer Determinante, in welcher alle partialen Determinanten $(2m+2)^{\text{ten}}$ Grades Null sind, auch diejenigen $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades sämmtlich verschwinden müssen. Wäre also die von *Clebsch* angegebene Unterscheidung richtig, so würde der indeterminirte Fall überhaupt nicht eintreten können.

Die linke Seite einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung wird von *Clebsch* zum Zwecke der Integration auf eine kanonische Form zurückgeführt, die sich durch grosse formale Einfachheit auszeichnet. Indem ich aber darauf ausging, die Berechtigung der aufgestellten kanonischen Formen aus inneren Gründen herzuleiten (Vgl. *Kronecker*, Berl. Monatsberichte 1874, Januar, über Schaaren von quadratischen Formen, S. 16), kam ich auf eine neue Weise, das *Pfaff*sche Problem zu formuliren, die ich zunächst auseinandersetzen will.

§. 1.

Neue Formulirung des *Pfaff*schen Problems.

In dem linearen Differentialausdruck erster Ordnung

$$(1.)\qquad a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n = \Sigma a dx$$

seien $a_1, \dots a_n$ gegebene (analytische) Functionen der unabhängigen Variablen $x_1, \dots x_n$. Da hier die Untersuchung in solcher Allgemeinheit geführt werden soll, dass kein specieller Fall von ihr ausgeschlossen bleibt, so können z. B. $a_n, \dots a_{k+1}$ Null sein, und $x_n, \dots x_{k+1}$ in $a_1, \dots a_k$ nicht vor-

kommen, so dass der betrachtete Ausdruck in Wirklichkeit nur k Variab
enthält.

Wir transformiren den Differentialausdruck (1.) durch Gleichunge

$$(2.) \qquad x_\alpha = \varphi_\alpha(x'_1, \dots x'_n), \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

welche die Veränderlichkeit von $x_1, \dots x_n$ nicht beschränken, in denen al
$\varphi_1, \dots \varphi_n$ n unabhängige (analytische) Functionen von $x'_1, \dots x'_n$ sind. Da
sind auch umgekehrt

$$(2^*.) \qquad x'_\alpha = \varphi'_\alpha(x_1, \dots x_n)$$

n unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n$. Setzt man

$$x_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta}, \quad x'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\beta},$$

so ist

$$(3.) \quad dx_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta}\, dx'_\beta \quad \text{und} \quad (3^*.) \quad dx'_\alpha = \sum_\beta x'_{\alpha\beta}\, dx_\beta,$$

und durch die Substitutionen (2.) und (3.) geht der Differentialausdruck (1
in einen andern von der Form

$$(1^*.) \qquad a'_1 dx'_1 + \dots + a'_n dx'_n = \Sigma a' dx'$$

über, in welchem $a'_1, \dots a'_n$ Functionen der neuen Variablen $x'_1, \dots x'_n$ sin
während sich durch die inversen Substitutionen (2*.) und (3*.) der Differe
tialausdruck (1*.) in (1.) verwandelt.

Zwei lineare Differentialausdrücke erster Ordnung, welche auf die
Weise in einander transformirt werden können, sollen *äquivalent* genan
werden.

Es könnte allgemeiner scheinen, zwei Differentialausdrücke (1.) un
(1*.), in denen die Anzahl der Grössen x derjenigen der Grössen x' nic
nothwendig gleich zu sein braucht, äquivalent zu nennen, wenn es möglic
ist, zwischen den unter sich unabhängigen Variablen x und den unter sic
ebenfalls unabhängigen Variablen x' solche Relationen aufzustellen, da
identisch

$$(4.) \qquad \Sigma a\, dx = \Sigma a' dx'$$

wird. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass zwei nach dieser Definitio
äquivalente Differentialausdrücke auch stets durch Substitutionen von de
Form (2.) und (3.) in einander übergeführt werden können. Denn ist etw
die Anzahl k der Variablen x kleiner als die Anzahl n der Variablen x'
so füge man zu den ersteren noch $n-k$ neue unabhängige Variable hinz
die in dem Differentialausdruck (1.) nicht vorkommen. Die Relatione

zwischen den Veränderlichen x und x' sollen die Veränderlichkeit der Grössen x (und ebenso die der Grössen x') nicht beschränken. Es darf sich also aus ihnen keine von den Grössen x' (oder x) freie Gleichung allein zwischen den Variablen x (oder x') herleiten lassen. Wenn durch diese Relationen, unter denen p unabhängige seien, die Gleichung (4.) eine identische wird, so bleibt sie es auch, wenn man zu ihnen noch $n-p$ andere (etwa lineare) hinzufügt. Diese kann man stets so wählen (am einfachsten in der Form $x_\alpha = x'_\beta$), dass sie zusammen mit den p gegebenen Relationen die Veränderlichkeit der n Grössen x (oder x') nicht beschränken. Löst man die so gebildeten n Gleichungen nach einem der beiden Variablensysteme auf, so nehmen die Transformationsgleichungen die Gestalt (2.) oder (2*.) an.

Umgekehrt wollen wir uns nun, wenn (1.) und (1*.) zwei *gegebene* Differentialausdrücke bedeuten, die Aufgabe stellen, zu entscheiden, ob sie äquivalent sind oder nicht, und falls sie es sind, die weitere Aufgabe, alle Substitutionen zu finden, durch welche der eine in den anderen übergeht.

§. 2.

Die bilineare Covariante.

Wenn die Differentialausdrücke (1.) und (1*.) äquivalent sind, und durch die Substitutionen (2.) oder (2*.) in einander übergehen, so muss die Gleichung (4.) richtig bleiben, wenn man unter $x_1, \dots x_n$ irgend welche Functionen einer oder mehrerer unabhängigen Variablen $u, v, \dots$ und unter $x'_1, \dots x'_n$ die durch die Gleichungen (2*.) bestimmten Functionen derselben Variablen versteht.

Es muss also

$$\Sigma a \frac{\partial x}{\partial u} = \Sigma a' \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \Sigma a \frac{\partial x}{\partial v} = \Sigma a' \frac{\partial x'}{\partial v}$$

sein und daher auch

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\Sigma a \frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\Sigma a \frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\Sigma a' \frac{\partial x'}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\Sigma a' \frac{\partial x'}{\partial v}\right)$$

oder ausgerechnet

$$\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\frac{\partial x_\alpha}{\partial u}\frac{\partial x_\beta}{\partial v} = \sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial a'_\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial a'_\beta}{\partial x'_\alpha}\right)\frac{\partial x'_\alpha}{\partial u}\frac{\partial x'_\beta}{\partial v}.$$

Setzt man

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial u} = u_\alpha, \quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial v} = v_\alpha, \quad \dots$$

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial u} = u'_\alpha, \quad \frac{\partial x'_\alpha}{\partial v} = v'_\alpha, \quad \dots$$

so können $u_\alpha, v_\alpha, \dots$ als ganz willkürliche, von den übrigen vorkommenden Grössen völlig unabhängige Variable betrachtet werden, wie man am einfachsten einsieht, indem man für x_α die lineare Function $u_\alpha u + v_\alpha v + \cdots$ mit willkürlichen Constanten $u_\alpha, v_\alpha, \dots$ setzt. Zufolge der Gleichungen (3.) und (3*.) sind sie mit $u'_\alpha, v'_\alpha, \dots$ durch die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} (5.) & u_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta} u'_\beta, \quad v_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta} v'_\beta, \quad \dots \\ (5^*.) & u'_\alpha = \sum_\beta x'_{\alpha\beta} u_\beta, \quad v'_\alpha = \sum_\beta x'_{\alpha\beta} v_\beta, \quad \dots \end{array} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots n),$$

verbunden. Setzt man ferner zur Abkürzung

$$(6.) \quad a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad a'_{\alpha\beta} = \frac{\partial a'_\alpha}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial a'_\beta}{\partial x'_\alpha},$$

so zeigen die entwickelten Formeln, dass durch die Substitutionen (5.) oder (5*.) nicht nur

$$(7.) \quad \Sigma a_\alpha u_\alpha = \Sigma a'_\alpha u'_\alpha,$$

sondern gleichzeitig auch

$$(8.) \quad \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = \Sigma a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta$$

wird. Diese Gleichungen werden vermöge der Substitutionen (5.) oder (5*.) zu identischen, wenn die Variablen $x_1, \dots x_n$ und $x'_1, \dots x'_n$ und ihre Functionen $a_\alpha, a'_\alpha, a_{\alpha\beta}, a'_{\alpha\beta}, x_{\alpha\beta}, x'_{\alpha\beta}$ sämmtlich durch $u, v, \dots$ ausgedrückt werden, also auch, wenn für $u, v, \dots$ wieder Functionen von irgend welchen anderen Variablen gesetzt werden. Nimmt man nun die Anzahl der unabhängigen Variablen $u, v, \dots$ gleich n und für $x_1, \dots x_n$ unabhängige Functionen derselben, so können auch umgekehrt $u, v, \dots$ wieder als Functionen von $x_1, \dots x_n$ dargestellt werden. Die Grössen $a_\alpha, a_{\alpha\beta}, x'_{\alpha\beta}$ werden dann wieder die gegebenen Functionen von $x_1, \dots x_n$; die Grössen a'_α, $a'_{\alpha\beta}, x_{\alpha\beta}$ aber müssen mittelst der Gleichungen (2*.) als Functionen von $x_1, \dots x_n$ dargestellt werden, damit die Gleichungen (7.) und (8.) vermöge der Substitutionen (5.) oder (5*.) zu identischen werden.

Damit die Differentialausdrücke (4.) äquivalent seien, ist demnach die algebraische Aequivalenz der Formen (7.) und (8.) eine nothwendige Bedingung. Es wird sich aber zeigen, dass sie auch die hinreichende Bedingung ist.

Die Grössen $u_1, \dots u_n$ und $v_1, \dots v_n$ bedeuten offenbar die Verhältnisse der nach zwei verschiedenen Richtungen genommenen Differentiale der Variablen $x_1, \dots x_n$. Da also, wenn d und δ Differentiale nach ver-

schiedenen Richtungen bezeichnen,

$$\Sigma a_{\alpha\beta} dx_\alpha \delta x_\beta = \Sigma a'_{\alpha\beta} dx'_\alpha \delta x'_\beta$$

ist, so soll der bilineare Differentialausdruck

$$(9.) \quad \delta(\Sigma a\,dx) - d(\Sigma a\,\delta x) = \Sigma(\delta a\,dx - da\,\delta x) = \Sigma a_{\alpha\beta} dx_\alpha \delta x_\beta$$

die ***bilineare Covariante*** des Differentialausdrucks (1.) genannt werden. (Vgl. ***Lipschitz***, dieses Journal, Bd. 70, S. 73.)

Nunmehr zerfällt die ganze Untersuchung in zwei Theile. Zunächst sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die algebraische Aequivalenz zweier Formenpaare, bestehend aus einer linearen und aus einer alternirenden bilinearen Form, zu untersuchen. Sodann ist festzustellen, ob weitere analytische Bedingungen nothwendig sind, damit zwei gegebene lineare Differentialausdrücke (und daher auch ihre bilinearen Covarianten) in einander transformirt werden können. (Vgl. ***Christoffel***, dieses Journal, Bd. 70, S. 60.) Bei der ersten Untersuchung ist demnach das Hauptaugenmerk darauf zu richten, für zwei äquivalente Formenpaare *alle* Substitutionen zu ermitteln, durch welche das eine in das andere übergeht. Denn nur so wird man in den Stand gesetzt zu entscheiden, ob sich unter ihnen auch solche befinden, welche geeignet sind, zwei Differentialausdrücke (1.) und (1*.) in einander zu transformiren.

Wir schicken daher der Hauptuntersuchung zwei vorbereitende Abschnitte voraus, einen algebraischen über die Aequivalenz der oben genannten Formenpaare und einen analytischen über die Integrabilitätsbedingungen für ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Ueber lineare Gleichungen und alternirende bilineare Formen.

§. 3.

Ueber adjungirte Systeme homogener linearer Gleichungen.

Gegeben seien m unabhängige homogene lineare Gleichungen

$$(10.)\qquad a_1^{(\mu)}u_1+\cdots+a_n^{(\mu)}u_n=0,\qquad (\mu=1,\dots m)$$

zwischen den $n(>m)$ Unbekannten $u_1,\dots u_n$. Ist

$$a_1u_1+\cdots+a_nu_n=0$$

irgend eine lineare Verbindung derselben, so rechnen wir sie auch zum System (10.). Auch kann dies System durch m unabhängige lineare Verbindungen seiner Gleichungen ersetzt werden. Die Determinanten m^{ten} Grades, die sich aus den Coefficienten $a_\alpha^{(\mu)}$ bilden lassen, und die wegen der Unabhängigkeit der Gleichungen nicht sämmtlich verschwinden, werden bei einer solchen Umformung alle mit demselben von Null verschiedenen Factor multiplicirt.

Sind $A_1,\dots A_n$ und $B_1,\dots B_n$ irgend zwei *particuläre* Lösungen der Gleichungen (10.), so ist auch $aA_1+bB_1,\dots aA_n+bB_n$ eine Lösung. Mehrere particuläre Lösungen

$$A_1^{(\varkappa)},\ \dots\ A_n^{(\varkappa)},\qquad (\varkappa=1,\dots k)$$

sollen daher *unabhängig* oder *verschieden* heissen, wenn $c_1A_\alpha^{(1)}+\cdots+c_kA_\alpha^{(k)}$ nicht für $\alpha=1,\dots n$ verschwinden kann, ohne dass $c_1,\dots c_k$ sämmtlich gleich Null sind, mit andern Worten, wenn die k linearen Formen $A_1^{(k)}u_1+\cdots+A_n^{(k)}u_n$ unabhängig sind.

Da die Determinanten m^{ten} Grades der Grössen $a_\alpha^{(\mu)}$ nicht alle verschwinden, so kann man die Grössen $U_\alpha^{(\nu)}$ so wählen, dass die Determinante

$$D=\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)}\\ \cdot & \dots & \cdot\\ a_1^{(m)} & \dots & a_n^{(m)}\\ U_1^{(1)} & \dots & U_n^{(1)}\\ \cdot & \dots & \cdot\\ U_1^{(n-m)} & \dots & U_n^{(n-m)}\end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Bezeichnet man mit $A_\alpha^{(\nu)}$ den Coefficienten von $U_\alpha^{(\nu)}$ in D, so ist

$$(11.)\qquad a_1^{(\mu)}A_1^{(\nu)}+\cdots+a_n^{(\mu)}A_n^{(\nu)}=0,\qquad (\mu=1,\dots m;\ \nu=1,\dots n-m),$$

und daher sind

$$(12.)\qquad A_1^{(\nu)},\ \dots\ A_n^{(\nu)},\qquad (\nu=1,\dots n-m)$$

$n-m$ Lösungen der Gleichungen (10.).

Ist $\varkappa, \ldots \lambda, \varrho, \ldots \sigma$ eine positive Permutation der Zahlen $1, \ldots n$, so sollen die Determinante m^{ten} Grades $\Sigma \pm a_\varkappa^{(1)} \ldots a_\lambda^{(m)}$ und die Determinante $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades $\Sigma \pm A_\varrho^{(1)} \ldots A_\sigma^{(n-m)}$ *complementäre* Determinanten der beiden Elementensysteme $a_\alpha^{(\mu)}$ und $A_\alpha^{(\nu)}$ genannt werden. Nach einem bekannten Satze ist die letztere Determinante das Product aus der ersteren in D^{n-m-1}. Die Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$ verhalten sich daher, wie die complementären Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $A_\alpha^{(\nu)}$. Da die Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$ nicht sämmtlich verschwinden, und D von Null verschieden ist, so sind auch die Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $A_\alpha^{(\nu)}$ nicht alle Null, und daher sind die $n-m$ Lösungen (12.) unabhängig.

Mehr als $n-m$ verschiedene Lösungen können aber die Gleichungen (10.) nicht haben. Denn sind $B_1^{(\nu)}, \ldots B_n^{(\nu)} (\nu = 1, \ldots n-m+1)$ $n-m+1$ Lösungen, und ist $c_1 B_\alpha^{(1)} + \cdots + c_{n-m+1} B_\alpha^{(n-m+1)} = B_\alpha$, so ist auch $B_1, \ldots B_n$ eine Lösung. Unter den Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$ sei etwa $M = \Sigma \pm a_1^{(1)} \ldots a_m^{(m)}$ von Null verschieden. Ueber die Constanten $c_1, \ldots c_{n-m+1}$ kann man so verfügen, dass irgend $n-m$ der Grössen $B_1, \ldots B_n$ gleich Null sind, weil $n-m$ homogene lineare Gleichungen mit $n-m+1$ Unbekannten $c_1, \ldots c_{n-m+1}$ stets eine Lösung zulassen. Macht man aber $B_{m+1} = \cdots = B_n = 0$, so folgt aus den m linearen Gleichungen $a_1^{(\mu)} B_1 + \cdots + a_m^{(\mu)} B_m = 0$ mit nicht verschwindender Determinante M, dass auch $B_1 = \cdots = B_m = 0$ ist. Folglich sind die $n-m+1$ Lösungen $B_1^{(\nu)}, \ldots B_n^{(\nu)}$ nicht unabhängig. Mithin haben m unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen n Unbekannten genau $n-m$ verschiedene Lösungen, und daher haben irgend m homogene lineare Gleichungen zwischen n Unbekannten wenigstens $n-m$ verschiedene Lösungen.

Sind $c_1, \ldots c_{n-m}$ *willkürliche Constanten,* so soll

$$A_1 = \Sigma c_\nu A_1^{(\nu)}, \quad \ldots \quad A_n = \Sigma c_\nu A_n^{(\nu)}$$

die *allgemeinste Lösung* der Gleichungen (10.) heissen. Aus ihr kann jede particuläre Lösung erhalten werden, indem man den willkürlichen Constanten bestimmte Werthe ertheilt. Sind daher $B_1^{(\nu)}, \ldots B_n^{(\nu)} (\nu = 1, \ldots n-m)$ irgend $n-m$ verschiedene Lösungen, so ist $B_\alpha^{(\nu)} = c_{\nu,1} A_\alpha^{(1)} + \cdots + c_{\nu,n-m} A_\alpha^{(n-m)}$, und die Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $B_\alpha^{(\nu)}$ unterscheiden sich von den entsprechenden des Systems $A_\alpha^{(\nu)}$ nur durch den von Null verschiedenen Factor $|c_{\varrho\sigma}|$. Daher verhalten sie sich, wie die complementären Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$.

Bedeuten von nun an die Grössen (12.) irgend $n-m$ verschiedene Lösungen der Gleichungen (10.), so sind

$$(13.)\qquad A_1^{(\nu)}u_1+\cdots+A_n^{(\nu)}u_n = 0$$

$n-m$ unabhängige homogene lineare Gleichungen zwischen den Unbekannten $u_1, \dots u_n$, und zufolge der Relationen (11.) sind

$$(14.)\qquad a_1^{(\mu)}, \dots a_n^{(\mu)} \quad (\mu = 1, \dots m)$$

m verschiedene Lösungen derselben. Die beiden Systeme linearer Gleichungen (10.) und (13.), und ebenso die Systeme ihrer Coefficienten $a_\alpha^{(\mu)}$ und $A_\alpha^{(\nu)}$ sollen einander *zugeordnet* oder *adjungirt* genannt werden. Zwischen ihren allgemeinsten Lösungen besteht die Relation

$$(11^*.)\qquad a_1A_1+\cdots+a_nA_n = 0.$$

Die Coefficienten des einen Gleichungssystems sind die Lösungen des andern. Die Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$ verhalten sich, wie die complementären Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades des zugeordneten Systems $A_\alpha^{(\nu)}$. Allgemeiner lässt sich zeigen, dass, wenn $k > n-m$ ist, jede aus $n-k$ $(< m)$ Colonnen des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$ gebildete partiale Determinante $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades bis auf eine Potenz von D eine lineare homogene Function der aus den übrigen k Colonnen des zugeordneten Systems $A_\alpha^{(\nu)}$ gebildeten Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades ist*).

Richtet man in dem System der $n-m$ verschiedenen Lösungen (12.) der Gleichungen (10.) sein Augenmerk nicht auf die Werthe aller Unbekannten, sondern nur auf die einer gewissen Anzahl $u_1, \dots u_k$, so fragt es sich, ob auch die Lösungen

$$(\alpha.)\qquad A_1^{(\nu)}, \quad \dots \quad A_k^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \dots n-m)$$

unabhängig sind. Diese Frage hat nur dann eine Bedeutung, wenn $k \geqq n-m$ ist. Die Bedingungen, unter denen alsdann jene Lösungen nicht unabhängig sind, ergeben sich ohne weiteres aus dem letzten Satze, lassen sich aber auch leicht direct ableiten. Ist $A_\alpha = \sum\limits_\nu c_\nu A_\alpha^{(\nu)}$, so ist $A_1, \dots A_n$ eine Lösung der Gleichungen (10.). Da die Lösungen (α.) nicht unabhängig sind, so kann man die Constanten $c_1, \dots c_{n-m}$ so bestimmen, dass $A_1, \dots A_k$ Null sind. Folglich genügen die Grössen $A_{k+1}, \dots A_n$ den Gleichungen

$$(\beta.)\qquad a_{k+1}^{(\mu)}u_{k+1}+\cdots+a_n^{(\mu)}u_n = 0 \qquad (\mu = 1, \dots m)$$

---

*) Wenn man die m linearen Formen (10.) durch irgend eine lineare Substitution und die $n-m$ linearen Formen (13.) durch die transponirte Substitution transformirt, so erhält man wieder zwei Systeme zugeordneter linearer Formen.

und sind, weil die Lösungen (12.) unabhängig sind, nicht sämmtlich Null. Daher müssen in dem Elementensystem

$$(\gamma.) \quad \begin{cases} a_{k+1}^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{k+1}^{(m)} & \dots & a_n^{(m)} \end{cases}$$

alle Determinanten $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Wenn umgekehrt in dem System $(\gamma.)$ alle Determinanten $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so sind in *jedem* System von $n-m$ verschiedenen Lösungen die Werthe der ersten k Unbekannten nicht unabhängig. Denn unter jener Voraussetzung sind (Vgl. §. 4.) die Gleichungen $(\beta.)$ unter einander verträglich, und daher kann man eine particuläre Lösung der Gleichungen (10.) erhalten, indem man $A_1 = \dots = A_k = 0$ setzt und $A_{k+1}, \dots A_n$ aus den Gleichungen $(\beta.)$ bestimmt. Da sich diese particuläre Lösung aus jedem System (12.) von $n-m$ verschiedenen Lösungen zusammensetzen lassen muss, so können die Constanten $c_1, \dots c_{n-m}$ so bestimmt werden, dass $c_1 A_\alpha^{(1)} + \dots + c_{n-m} A_\alpha^{(n-m)}$ für $\alpha = 1, \dots k$ verschwindet.

§. 4.

Ueber den Zusammenhang der partialen Determinanten eines Elementensystems.

In dem nach Zeilen und Colonnen geordneten Elementensystem $a_{\alpha\beta}$, in welchem die Anzahl der Zeilen derjenigen der Colonnen nicht gleich zu sein braucht, sei eine partiale Determinante m^{ten} Grades, etwa $M = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$, von Null verschieden. Damit dann die partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades sämmtlich verschwinden, ist nach einem Satze des Herrn *Kronecker* (*Baltzer,* Det. §. 4, 7; dieses Journal Bd. 72, S. 152) nur erforderlich, dass alle diejenigen Null sind, deren Elemente man erhält, indem man zu den Elementen von M die irgend einer Zeile und Colonne des Systems $a_{\alpha\beta}$ hinzufügt, also alle Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1\sigma} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m\sigma} \\ a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho m} & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix},$$

wo man für ϱ und σ nur alle Paare von Zahlen, die grösser als m sind, zu setzen braucht.

Alsdann ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{11}A_1+\dots+a_{1n}A_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m1}A_1+\dots+a_{mn}A_n \\ a_{\alpha 1} & \dots & a_{\alpha m} & a_{\alpha 1}A_1+\dots+a_{\alpha n}A_n \end{vmatrix} = 0,$$

als eine homogene lineare Function von $A_1, \dots A_n$, deren Coefficienten theils identisch, theils nach Voraussetzung verschwinden. (*Kronecker*, *Baltzer*, Det. §. 8, 3).

Ist nun $A_1, \dots A_n$ eine Lösung der Gleichungen

$$(\alpha.)\qquad a_{\mu 1}u_1+\dots+a_{\mu n}u_n=0,\quad (\mu=1,\dots m)$$

so reducirt sich die obige Gleichung auf $M(a_{\alpha 1}A_1+\dots+a_{\alpha n}A_n)=0$. Da M von Null verschieden ist, so müssen folglich alle Lösungen der Gleichungen (α.) auch die Gleichungen

$$(\beta.)\qquad a_{\alpha 1}u_1+\dots+a_{\alpha n}u_n=0\quad (\alpha=1,\dots m,\ m+1, m+2,\dots)$$

befriedigen. Weil aber die m unabhängigen Gleichungen (α.) $n-m$ verschiedene Lösungen haben, so haben auch die Gleichungen (β.) $n-m$ unabhängige Lösungen.

Wenn umgekehrt mehr als m Gleichungen zwischen n ($>m$) Variablen $n-m$ verschiedene Lösungen haben, so müssen in dem System der Coefficienten alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Denn nimmt man irgend $m+1$ dieser Gleichungen, so könnten dieselben, wenn nicht alle Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades ihrer Coefficienten verschwänden, wenn sie also unabhängig wären, nicht mehr als $n-m-1$ verschiedene Lösungen besitzen.

Seien nun $A_1^{(\nu)}, \dots A_n^{(\nu)}$ $(\nu=1,\dots n-m)$ irgend $n-m$ verschiedene Lösungen der Gleichungen (α.), also auch der Gleichungen (β.). Greift man irgend m dieser Gleichungen heraus, so sind dieselben entweder unabhängig oder nicht. Im ersteren Falle verhalten sich die Determinanten m^{ten} Grades, die sich aus ihren Coefficienten bilden lassen, wie die complementären Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades der Lösungen $A_\alpha^{(\nu)}$. Aber auch im andern Falle bleibt dieser Satz richtig, weil dann die partialen Determinanten m^{ten} Grades der Coefficienten alle verschwinden. Wir ziehen daraus den Schluss: (Vgl. *Kronecker*, Berl. Monatsberichte, 1874, April, Ueber die congruenten Transf. etc., letzte Seite.)

I. *In einem Elementensystem, in welchem alle partialen Determinanten* $(m+1)^{ten}$ *Grades verschwinden, verhalten sich die aus irgend m Zeilen gebildeten*

partialen Determinanten m^{ten} Grades, wie die entsprechenden aus irgend m andern Zeilen gebildeten partialen Determinanten m^{ten} Grades.

Entsprechend heissen hier solche Determinanten m^{ten} Grades, die aus den nämlichen m Colonnen (in derselben Reihenfolge) gebildet sind. Sind also P und Q zwei aus m bestimmten Zeilen gebildete Determinanten m^{ten} Grades, und P' und Q' die entsprechenden aus m beliebigen andern Zeilen gebildeten Determinanten, so ist $PQ' = P'Q$. Wenn daher P' und Q beide von Null verschieden sind, so kann auch P nicht verschwinden. Daraus ergiebt sich der Satz:

II. ***Kann man aus einem Elementensystem, in welchem alle partialen Determinanten $(m+1)^{ten}$ Grades verschwinden, m Zeilen und m Colonnen so auswählen, dass weder in den m Zeilen noch in den m Colonnen alle partialen Determinanten m^{ten} Grades gleich Null sind, so muss auch die diesen Zeilen und Colonnen gemeinschaftliche partiale Determinante m^{ten} Grades von Null verschieden sein.***

Dieser Satz lässt sich auch in folgender Weise herleiten. In dem Elementensystem $a_{\alpha\beta}$ seien alle partialen Determinanten $(m+1)^{ten}$ Grades Null. Ferner sei $M = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm} = 0$. In den ersten m Zeilen möge sich aber auch eine von Null verschiedene Determinante m^{ten} Grades befinden. In Folge der letzten Annahme müssen alle Werthe von $u_1, \dots u_n$, welche den Gleichungen (α.) genügen, auch die Gleichungen (β.) befriedigen. Nun kann man aber den Gleichungen (α.) genügen, indem man $u_{m+1} = \dots = u_n = 0$ setzt, und $u_1, \dots u_m$ aus den Gleichungen $a_{\mu 1} u_1 + \dots + a_{\mu m} u_m = 0$ $(\mu = 1, \dots m)$ bestimmt, die nach der Voraussetzung $M = 0$ mit einander verträglich sind. Da die so erhaltenen Werthe auch den Gleichungen (β.) genügen, so muss

$$a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha m} u_m = 0 \quad (\alpha = 1, \dots m, m+1, m+2, \dots)$$

sein. Folglich müssen in dem System

$$a_{\alpha 1}, \quad \dots \quad a_{\alpha m} \quad (\alpha = 1, \dots m, m+1, m+2, \dots)$$

alle Determinanten m^{ten} Grades verschwinden. Sind also nicht alle Determinanten m^{ten} Grades in diesem System Null, so kann man daraus umgekehrt den Schluss ziehen, dass M von Null verschieden sein muss, womit Satz II. bewiesen ist.

Nehmen wir jetzt an, dass das System $a_{\alpha\beta}$ aus gleich viel Zeilen und Colonnen besteht und symmetrisch ($a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$) oder alternirend ($a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, $a_{\alpha\alpha} = 0$) ist. Dann sind die partialen Determinanten m^{ten} Grades, die aus irgend m

Zeilen gebildet sind, denen, die aus den gleichnamigen m Colonnen gebildet sind, der Reihe nach bis auf das Zeichen gleich. Nennt man also eine partiale Determinante, deren Diagonale nur Elemente aus der Diagonale der ganzen Determinante enthält, eine Hauptunterdeterminante, so ergiebt sich aus Satz II. die Folgerung:

III. *Wenn in der Determinante eines symmetrischen oder eines alternirenden Systems alle partialen Determinanten* $(m+1)^{ten}$ *Grades verschwinden, so muss in jedem System von m Zeilen, in welchem irgend eine partiale Determinante* m^{ten} *Grades nicht verschwindet, auch die Hauptunterdeterminante von Null verschieden sein.*

In jedem System von m Zeilen, in welchem die Hauptunterdeterminante Null ist, müssen also auch alle andern partialen Determinanten m^{ten} Grades verschwinden. Dies tritt stets ein, wenn das System $a_{\alpha\beta}$ alternirend und m ungerade ist. Denn alsdann sind die Hauptunterdeterminanten m^{ten} Grades schiefe Determinanten unpaaren Grades, und daher identisch Null. Daraus ergeben sich die Sätze:

IV. *Ist in einer schiefen Determinante m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, so ist m nothwendig eine gerade Zahl und unter den nicht verschwindenden partialen Determinanten* m^{ten} *Grades befinden sich auch Hauptunterdeterminanten.*

V. *Wenn in einer schiefen Determinante die partialen Determinanten* $2r^{ten}$ *Grades alle verschwinden, so sind auch die* $(2r-1)^{ten}$ *Grades sämmtlich Null.*

Da diese Eigenschaften der schiefen Determinanten für die folgenden Untersuchungen von grosser Wichtigkeit sind, so wollen wir sie noch auf einem andern Wege ableiten.

§. 5.

Schiefe Determinanten.

Ist $A_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in der verschwindenden Determinante $M=\Sigma\pm a_{11}\dots a_{mm}$, so ist $A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta}=A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$. Ist nun M eine schiefe Determinante und m eine gerade Zahl $(=2r)$, so ist $A_{\alpha\beta}=-A_{\beta\alpha}$ und $A_{\alpha\alpha}=A_{\beta\beta}=0$. Daher ist $A_{\alpha\beta}=0$. Oder:

Die Determinante M ist das Quadrat einer ganzen Function von $a_{\alpha\beta}$. Wenn sie also Null ist, so verschwindet sie von der zweiten Ordnung, und daher ist auch ihre Ableitung $\frac{\partial M}{\partial a_{\alpha\beta}}=2A_{\alpha\beta}=0$. Wenn also eine schiefe

Determinante $2r^{\text{ten}}$ Grades verschwindet, so sind auch ihre partialen Determinanten $(2r-1)^{\text{ten}}$ Grades sämmtlich Null.

Den (*Pfaff*schen) Ausdruck, dessen Quadrat die Determinante M ist, und in welchem das Glied $a_{12}a_{34}\dots a_{m-1,m}$ den Coefficienten $+1$ hat, bezeichnen wir nach *Jacobi* mit $(1,2,\dots m)$. Für solche Ausdrücke gilt ein dem Determinantensatze des Herrn *Kronecker* ganz analoges Theorem:

I. ***Wenn der Pfaffsche Ausdruck*** r^{ten} ***Grades*** $(1,2,\dots 2r)$ ***von Null verschieden ist, aber alle Ausdrücke*** $(r+1)^{ten}$ ***Grades verschwinden, die man aus*** $(1,2,\dots 2r,\varrho,\sigma)$ ***erhält, indem man für*** ϱ, σ ***alle verschiedenen Paare ungleicher Zahlen setzt, die grösser als*** $2r$ ***sind, so verschwinden alle Ausdrücke*** $(\alpha,\beta,\gamma\dots)$ ***vom*** $(r+1)^{ten}$ ***Grade.***

Dieser Satz ergiebt sich aus dem allgemeineren Satze:

II. ***Wenn in einer schiefen Determinante eine Hauptunterdeterminante*** $2r^{ten}$ ***Grades von Null verschieden ist, aber alle Hauptunterdeterminanten*** $(2r+2)^{ten}$ ***Grades verschwinden, welche man aus jener erhält, indem man irgend zwei Zeilen und die gleichnamigen Colonnen hinzufügt, so verschwinden alle partialen Determinanten*** $(2r+1)^{ten}$ ***Grades.***

Sei $m=2r$, sei $M=\Sigma\pm a_{11}\dots a_{mm}=(1,2,\dots m)^2$ von Null verschieden und sei für alle verschiedenen Paare ungleicher Zahlen ϱ, σ, die grösser als $2r$ sind,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1\varrho} & a_{1\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m\varrho} & a_{m\sigma} \\ a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho m} & a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho\sigma} \\ a_{\sigma 1} & \dots & a_{\sigma m} & a_{\sigma\varrho} & a_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} = (1,2,\dots m,\varrho,\sigma)^2 = 0.$$

Da der Grad dieser verschwindenden schiefen Determinante $2r+2$ eine gerade Zahl ist, so sind nach dem oben bewiesenen Satze auch ihre partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades alle Null, z. B. ist der Coefficient von $a_{\sigma\varrho}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m\sigma} \\ a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho m} & a_{\varrho\sigma} \end{vmatrix} = 0,$$

falls ϱ von σ verschieden ist. Ist $\varrho=\sigma$, so verschwindet diese Determinante identisch. Nach dem Satze des Herrn *Kronecker* folgt aber daraus, dass

alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Daher verschwinden auch alle partialen Determinanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades, und folglich auch die Quadratwurzeln aus den Hauptunterdeterminanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades, die *Pfaff*schen Ausdrücke $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades $(\alpha, \beta, \gamma \ldots)$.

Ferner ergiebt sich, dass das Verschwinden aller Hauptunterdeterminanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades auch das aller partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades nach sich zieht, vorausgesetzt, dass eine Hauptunterdeterminante $2r^{\text{ten}}$ Grades von Null verschieden ist. Sollte keine Hauptunterdeterminante $2r^{\text{ten}}$ Grades von Null verschieden sein, dagegen irgend eine Hauptunterdeterminante $(2r-2)^{\text{ten}}$ Grades, so würde sich auf dieselbe Weise ergeben, dass alle partialen Determinanten $(2r-1)^{\text{ten}}$ Grades und folglich auch alle $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwänden. Indem man diesen Schluss weiter fortsetzt, gelangt man zu dem Satze:

III. ***Wenn in einer schiefen Determinante alle Hauptunterdeterminanten*** $2r^{ten}$ ***Grades Null sind, so verschwinden auch alle partialen Determinanten*** $(2r-1)^{ten}$ ***Grades.***

Wenn man in der schiefen Determinante

$$(\alpha.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n \\ -a_1 & \cdots & -a_n & 0 \end{vmatrix}$$

die letzte Colonne weglässt, und wenn in dem übrig bleibenden Elementensysteme

$$(\beta.) \qquad \left\{ \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ -a_1 & \cdots & -a_n \end{matrix} \right.$$

alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so sind in der Determinante $(\alpha.)$ alle partialen Determinanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades Null, als lineare homogene Functionen von partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $(\beta.)$. Nach Satz III. verschwinden daher auch alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $(\alpha.)$. Damit also in der Determinante $(\alpha.)$ alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist nothwendig und hinreichend, dass dies in dem System $(\beta.)$ der Fall ist.

In der schiefen Determinante $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$ sei der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten $m = 2r$. Dann haben die linearen Gleichungen

$$(\gamma.) \qquad a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha n} u_n = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

$n - m$ verschiedene Lösungen. Je nachdem für alle diese Lösungen auch

$$(\delta.) \qquad a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$$

ist, oder nicht, d. h. je nachdem die Gleichung $(\delta.)$ eine lineare Combination der Gleichungen $(\gamma.)$ ist, oder nicht, sind auch in dem System $(\beta.)$ und folglich auch in der Determinante $(\alpha.)$ alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades Null, oder nicht.

§. 6.

Simultane Transformation einer bilinearen Form und mehrerer Paare linearer Formen.

Die bilineare Form

$$W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

gehe durch Substitutionen

$$(\alpha.) \qquad u_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta} u'_\beta, \quad v_\alpha = \sum_\beta y_{\alpha\beta} v'_\beta,$$

deren Determinanten von Null verschieden seien, in

$$W' = \Sigma a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta$$

über. Dann ist (*Weierstrass*, Berl. Monatsberichte, 1868, Mai, S. 311) jede partiale Determinante m^{ten} Grades des einen der beiden Coefficientensysteme $a_{\alpha\beta}$ und $a'_{\alpha\beta}$ eine homogene lineare Function der partialen Determinanten m^{ten} Grades des andern. Daher sind alle partialen Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a'_{\alpha\beta}$ Null oder von Null verschieden, je nachdem es die des Systems $a_{\alpha\beta}$ sind. Der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist folglich für beide Systeme derselbe.

Ausser der bilinearen Form sei noch ein Paar linearer Formen

$$\sum_\alpha a_{\alpha,n+1} u_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_\beta a_{n+1,\beta} v_\beta$$

gegeben, welche durch die Substitutionen $(\alpha.)$ in

$$\Sigma a'_{\alpha,n+1} u'_\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma a'_{n+1,\beta} v'_\beta$$

übergehen mögen. Dann verwandelt sich die bilineare Form*):

*) Die Methode, welche ich hier zur Untersuchung der simultanen Transformation einer bilinearen Form und eines oder mehrerer Paare linearer Formen gebraucht habe, ist bereits von Herrn *Stickelberger* (De problemate quodam ad duarum formarum bilinearium vel quadraticarum transformationem pertinente. Diss. inaug. Berolini 1874. pag. 10) und von Herrn *Darboux* (*Liouv.* Journ. Ann. 1874, p. 351) angewendet.

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta + v_{n+1} \sum_\alpha{}_1^n a_{\alpha,n+1} u_\alpha + u_{n+1} \sum_\beta{}_1^n a_{n+1,\beta} v_\beta + a_{n+1,n+1} u_{n+1} v_{n+1},$$

wo $a_{n+1,n+1}$ eine willkürliche Grösse ist, oder kürzer die Form

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^{n+1} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

durch jene Substitutionen, verbunden mit

$$u_{n+1} = u'_{n+1}, \quad v_{n+1} = v'_{n+1},$$

in

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^{n+1} a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta,$$

wo $a'_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}$ ist. Daher muss nicht nur in der Determinante n^{ten} Grades $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, sondern auch in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn} a_{n+1,n+1}$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten invariant sein. Sind ausser der bilinearen Form noch k Paare linearer Formen

$$\sum_\alpha a_{\alpha,n+\varkappa} u_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_\beta a_{n+\varkappa,\beta} v_\beta \qquad (\varkappa = 1, \dots k)$$

gegeben, welche durch die Substitutionen (α.) in

$$\Sigma a'_{\alpha,n+\varkappa} u'_\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma a'_{n+\varkappa,\beta} v'_\beta$$

übergehen, so verwandelt sich die bilineare Form

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^{n+k} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta,$$

in welcher die Grössen $a_{n+\varkappa,n+\lambda}$ willkürlich sind, durch jene Substitutionen verbunden mit

$$u_{n+\varkappa} = u'_{n+\varkappa}, \quad v_{n+\varkappa} = v'_{n+\varkappa}, \qquad (\varkappa = 1, \dots k)$$

in

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^{n+k} a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta,$$

wo $a'_{n+\varkappa,n+\lambda} = a_{n+\varkappa,n+\lambda}$ ist. Daher muss auch in der Determinante

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn} a_{n+1,n+1} \dots a_{n+k,n+k}$$

der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten invariant sein. Z. B. muss dies in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,n+k} \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+k,1} & \dots & a_{n+k,n} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

der Fall sein, in der die willkürlichen Grössen gleich Null gesetzt sind.

§. 7.

Simultane congruente Transformation einer alternirenden bilinearen und einer linearen Form. Die Invariante p.

Wenn die alternirende bilineare Form

$$W = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

durch *congruente* (*Kronecker*, Berl. Monatsberichte, 1874, April) Substitutionen von nicht verschwindender Determinante

$$(5.) \qquad u_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta} u'_\beta, \quad v_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta} v'_\beta \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

in

$$W' = \Sigma a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta$$

übergeht, so ist auch W' eine alternirende bilineare Form. Geht durch diese Substitution die lineare Form

$$U = \sum_\alpha a_\alpha u_\alpha$$

in

$$U' = \Sigma a'_\alpha u'_\alpha$$

über, so soll das Formenpaar U, W dem Formenpaar U', W' *äquivalent* heissen.

Sind umgekehrt zwei Formenpaare, jedes bestehend aus einer linearen und aus einer alternirenden bilinearen Form, gegeben, so soll entschieden werden, ob sie äquivalent sind, oder nicht, und im ersteren Falle sollen alle Substitutionen gefunden werden, durch welche das erste Formenpaar in das zweite übergeht. Da die Coefficienten a_α alle Null sein können, so enthält diese Aufgabe das Problem der congruenten Transformation einer alternirenden bilinearen Form als speciellen Fall.

Durch die Substitution (5.) geht auch die lineare Form $\Sigma - a_\beta v_\beta$ in $\Sigma - a'_\beta v'_\beta$ über. Aus den Erörterungen in §. 6 folgt daher, dass in den beiden Determinanten

$$(15.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$(16.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 \end{vmatrix}$$

die höchsten Grade nicht verschwindender Unterdeterminanten Invarianten sind.

In der schiefen Determinante (15.) ist der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten m eine gerade Zahl $2r$, und unter den von Null verschiedenen partialen Determinanten m^{ten} Grades befinden sich auch Hauptunterdeterminanten (§. 4, IV.). Wo es nöthig ist, können wir daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$M = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$$

von Null verschieden ist.

In der schiefen Determinante (16.) sind dann alle partialen Determinanten $(m+3)^{\text{ten}}$ Grades Null. Es ist nun *erstens* möglich, dass auch die $(m+2)^{\text{ten}}$ Grades sämmtlich verschwinden. Dann müssen, da $m+2$ eine gerade Zahl ist, auch die $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades alle Null sein, während die m^{ten} Grades offenbar nicht alle Null sind. Oder es ist *zweitens* möglich, dass in der Determinante (16.) die partialen Determinanten $(m+2)^{\text{ten}}$ Grades nicht alle verschwinden. Ausser diesen beiden Fällen ist kein dritter möglich.

Dieser zwischen den beiden oben gefundenen Invarianten bestehende Zusammenhang ermöglicht es, sie auf eine einzige Invariante zurückzuführen. Der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist für die Determinante (15.) in beiden Fällen $2r$, für die Determinante (16.) aber im ersten Falle $2r$, im anderen $2r+2$. Das arithmetische Mittel aus diesen beiden Invarianten, das wir mit p bezeichnen wollen, ist im ersten Falle $2r$, also gerade, im anderen $2r+1$, also ungerade. Daher muss auch umgekehrt der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, falls p gerade ist, für (15.) und (16.) gleich p, wenn p aber ungerade ist, für (15.) gleich $p-1$ und für (16.) gleich $p+1$ sein. Das arithmetische Mittel p aus den höchsten Graden der in (15.) und (16.) nicht verschwindenden Unterdeterminanten ist demnach eine Invariante, welche die oben genannten Invarianten beide ersetzt. Ich werde aber zeigen, dass für die Aequivalenz zweier Formenpaare die Uebereinstimmung der Invariante p nicht nur eine nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung ist. Nennen wir daher die Gesammtheit der Formenpaare, welche mit einem gegebenen äquivalent sind, eine *Classe* von Formenpaaren, so können wir alle Formenpaare mit der Invariante p zur p^{ten} Classe rechnen.

Der Unterschied zwischen Formenpaaren gerader und ungerader Classe lässt sich, wenn man $a_{\alpha 0} = a_\alpha$ und $a_{0\beta} = -a_\beta$ setzt, nach §. 5, (I.) kurz so charakterisiren (Vgl. *Jacobi,* dieses Journal, Bd. 29, S. 242, *Natani,* dieses Journal, Bd. 58, S. 316):

Ist der *Pfaff*sche Ausdruck r^{ten} Grades

$$\text{(I.)} \quad (1,\ 2,\ \ldots\ m)$$

von Null verschieden, während die *Pfaff*schen Ausdrücke $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\text{(II.)} \quad (1,\ 2,\ \ldots\ m,\ \varrho,\ \sigma) = 0$$

sind, wo für $\varrho,\ \sigma$ alle verschiedenen Paare ungleicher Zahlen von $m+1$ bis n zu setzen sind, so ist die Invariante p gleich $m(=2r)$ oder $m+1(=2r+1)$, je nachdem die *Pfaff*schen Ausdrücke $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\text{(III.)} \quad (1,\ 2,\ \ldots\ m,\ \varrho,\ 0), \quad (\varrho = m+1,\ \ldots\ n)$$

alle oder nicht alle verschwinden.

Ist $m=n$, so ist $p(=n)$ immer gerade, und die Bedingungen (II.) und (III.) fallen weg. Ist $m=n-1$, so fallen die Bedingungen (II.) weg, und p ist gerade $(=n-1)$ oder ungerade $(=n)$, je nachdem der Ausdruck (III.) verschwindet oder nicht (*Jacobi,* dieses Journal Bd. 2, S. 356).

Ist in der Determinante (15.) m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, so lassen sich die n Formen

$$a_{\alpha 1} u_1 + \cdots + a_{\alpha n} u_n, \quad (\alpha = 1,\ \ldots\ n)$$

welche die Ableitungen von $-W$ nach $v_1,\ \ldots\ v_n$ sind, alle aus m unter ihnen linear zusammensetzen. Nach der Bemerkung am Ende des §. 5 ist in der Determinante (16.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten m oder $m+2$, je nachdem sich die Form

$$U = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$$

aus jenen Formen linear zusammensetzen lässt, oder nicht.

Wenn die Determinante (15.) der bilinearen Form W nicht verschwindet, so sind ihre n Ableitungen n unabhängige Linearformen von n Variablen, und jede andere Linearform derselben Variablen lässt sich aus ihnen zusammensetzen. In Bezug auf eine bilineare Form W von verschwindender Determinante aber zerfallen die Linearformen U in zwei Gruppen. Für die Formen der einen Gruppe ist der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten in (16.) ebenso gross, wie in (15.). Sie bilden mit W ein Formenpaar gerader Classe, und lassen sich aus den Ableitungen von W linear zusammensetzen. Für die Formen der anderen Gruppe ist der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten in (16.) um zwei grösser, als in (15.). Sie bilden mit W ein Formenpaar ungerader Invariante und lassen sich nicht aus den Ableitungen von W linear zusammensetzen.

§. 8.

Die Aequivalenz der Formenpaare von gerader Invariante $p = 2r$.

Um zu beweisen, dass die Uebereinstimmung der Invariante p, die wir zunächst als gerade ($= m = 2r$) voraussetzen wollen, für zwei Formenpaare nicht nur eine nothwendige, sondern auch die hinreichende Aequivalenzbedingung ist, kommt es darauf an, eine Substitution zu finden, durch welche das eine in das andere übergeht. Eine solche pflegt man mit Hülfe der zugehörigen Formen abzuleiten (*Aronhold,* dieses Journal Bd. 62 S. 316). Dies beruht darauf, dass man zu einer zugehörigen Form die transformirte kennt, ohne dass man die Substitution zu kennen braucht, durch welche das eine Formensystem in das andere übergeht. Wir werden uns hier von einem ganz ähnlichen Gedanken leiten lassen.

Wenn die Substitution (5.) gegeben ist, so kann man zu einer beliebigen linearen Form $\Sigma c_\alpha u_\alpha$ die transformirte Form $\Sigma c'_\alpha u'_\alpha$ finden. Umgekehrt kann man aber auch, falls man eine hinreichende Anzahl von linearen Formen aufzufinden vermag, zu denen man ohne Kenntniss der Substitution (5.) die transformirten angeben kann, die Gleichungen $\Sigma c_\alpha u_\alpha = \Sigma c'_\alpha u'_\alpha$ zur Ermittlung der Substitution (5.) benutzen. Zu solchen linearen Functionen gelangt man im vorliegenden Falle durch folgende Ueberlegung.

Wenn durch die Substitution (5.) nicht nur die bilineare Form W in W' und die lineare Form U in U' übergeht, sondern auch die linearen Formen

$$U_\varrho = a_1^{(\varrho)} u_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} u_n \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

sich in

$$U'_\varrho = a_1^{(\varrho)\prime} u'_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)\prime} u'_n$$

verwandeln, so muss nach §. 6 in der Determinante

$$(\alpha.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_1 & a_1^{(1)} & \ldots & a_1^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_n & a_n^{(1)} & \ldots & a_n^{(k)} \\ -a_1 & \ldots & -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_1^{(1)} & \ldots & -a_n^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(k)} & \ldots & -a_n^{(k)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten derselbe sein, wie in der analogen aus den Coefficienten der transformirten Formen gebildeten Determinante. Sind die linearen Formen U_ϱ ganz beliebige, so

wird jener Grad im Allgemeinen eine Zahl l sein, auf deren Ermittlung hier nichts ankommt. Für specielle Linearformen kann er aber auch kleiner als l sein, und dann ist er für die transformirten Formen ebenfalls kleiner als l. Genügen also die Coefficienten der Formen U_ϱ den Gleichungen, welche ausdrücken, dass jener Grad kleiner als l ist, so genügen die Coefficienten von U'_ϱ Gleichungen, die aus den Coefficienten von W' und U' ebenso zusammengesetzt sind, wie jene Gleichungen aus den Coefficienten von W und U. Die Anzahl dieser Gleichungen ist um so grösser, je kleiner der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten in (α.) ist. Da er nicht kleiner als m sein kann, so wollen wir möglichst viele unabhängige Linearformen U_ϱ so zu bestimmen suchen, dass jener Grad in (α.) gleich m ist*).

Die Anzahl solcher Formen kann nicht grösser als r sein. Denn ist in der Determinante (α.) $k=r+1$, und sind alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades Null, so verschwinden auch alle Hauptunterdeterminanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades. Z. B. ist, wenn $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ irgend $r+1$ verschiedene Zahlen von 1 bis n sind,

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & \dots & a_{\alpha\varepsilon} & a_\alpha^{(1)} & \dots & a_\alpha^{(r+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varepsilon\alpha} & \dots & a_{\varepsilon\varepsilon} & a_\varepsilon^{(1)} & \dots & a_\varepsilon^{(r+1)} \\ -a_\alpha^{(1)} & \dots & -a_\varepsilon^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_\alpha^{(r+1)} & \dots & -a_\varepsilon^{(r+1)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha^{(1)} & \dots & a_\varepsilon^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_\alpha^{(r+1)} & \dots & a_\varepsilon^{(r+1)} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

In dem System $a_\alpha^{(\varrho)}$ sind also alle Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades Null, und daher sind die Formen $U_1, \dots U_{r+1}$ nicht unabhängig. Ich werde aber beweisen, dass sich stets r unabhängige Formen $U_1, \dots U_r$ so bestimmen lassen, dass in der Determinante

$$(17.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(r)} \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(r)} & \dots & -a_n^{(r)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

*) Herr *Darboux* (*Liouv.* Journ. Ann. 1874 p. 350) hat Determinanten von der Form (α.) in die Untersuchung der Aequivalenz quadratischer Formen eingeführt. Er lässt aber die Formen U_ϱ allgemein, d. h. verfügt so über dieselben, dass in (α.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten möglichst gross ist.

alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Daraus folgt aber auf die nämliche Weise wie oben, dass die Formen $U, U_1 \dots U_r$ nicht unabhängig sind, also, da $U_1 \dots U_r$ unabhängig sind, dass zwischen ihnen eine Relation von der Form

$$(18.) \qquad U = c_1 U_1 + \dots + c_r U_r$$

besteht. Ich werde nun zweitens beweisen, dass in dieser Relation $c_1, \dots c_r$ beliebig *gegebene* Werthe haben können, mit zwei Einschränkungen, die dadurch bedingt sind, dass U eine gegebene Form ist, und dass $U_1 \dots U_r$ unabhängig sein sollen. Wenn nämlich die Coefficienten von U nicht alle Null sind, so dürfen $c_1, \dots c_r$ nicht alle gleich Null angenommen werden; wenn aber U identisch verschwindet, so müssen $c_1, \dots c_r$ alle Null sein, und die Relation (18.) muss sich auf $U = 0$ reduciren.

Da in der Determinante (16.) m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, so haben die Gleichungen

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha n} u_n + a_\alpha u = 0, & (\alpha = 1, \dots n) \\ a_1 \; u_1 + \dots + a_n \; u_n = 0 \end{cases}$$

$n+1-m$ unabhängige Lösungen. In denselben sind auch die Werthe der ersten n Unbekannten unabhängig, es müssten denn $a_1, \dots a_n$ alle verschwinden (§. 3.). In diesem Falle ergeben sich aus den Gleichungen (β.) $n-m$ verschiedene Werthe für $u_1, \dots u_n$.

Damit nun auch in der schiefen Determinante

$$(\gamma.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & a_1^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & a_n^{(1)} \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

welche eine Zeile und Colonne mehr enthält als (16.), alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist nach den Erörterungen am Ende des §. 5 nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung

$$a_1^{(1)} u_1 + \dots + a_n^{(1)} u_n = 0$$

durch alle Lösungen der Gleichungen (β.) befriedigt wird. Die Coefficienten

$$(\delta.) \qquad a_1^{(1)}, \quad \dots \quad a_n^{(1)}$$

müssen also allen Gleichungen genügen, welche

$$(\varepsilon.) \qquad A_1 u_1 + \dots + A_n u_n = 0$$

darstellt, wenn für $A_1, \dots A_n$ der Reihe nach alle Werthe gesetzt werden, die sich aus den Gleichungen (β.) für die n ersten Unbekannten ergeben. Die Anzahl dieser Gleichungen ist höchstens $n+1-m$, die Anzahl ihrer Lösungen also mindestens $n-(n+1-m) = m-1$. Unter denselben befindet sich zufolge der letzten Gleichung (β.) auch $a_1, \dots a_n$. Hat nun die Relation (18.) die Gestalt $U = 0$, so nehme man für (δ.) eine beliebige Lösung der Gleichungen (ε.). Hat dagegen jene Relation die Gestalt $U = c_1 U_1$, wo c_1 von Null verschieden ist, so muss man

$$a_1^{(1)} = \frac{a_1}{c_1}, \quad \dots \quad a_n^{(1)} = \frac{a_n}{c_1}$$

setzen. Hat die Relation (18.) aber keine dieser beiden Gestalten, so nehme man für (δ.) eine von $a_1, \dots a_n$ unabhängige Lösung. Dann ist in der Determinante (γ.) m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten.

Es seien nun bereits k unabhängige Formen $U_1, \dots U_k$ so bestimmt, dass in der Determinante (α.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Wenn ferner die Relation (18.) die Gestalt $U = c_1 U_1 + \dots + c_k U_k$ hat, wo $c_1, \dots c_k$ auch alle oder zum Theil Null sein können, so sei ihr bereits Genüge geschehen. Hat sie aber nicht diese Gestalt, so seien $U_1, \dots U_k$ auch von U unabhängig.

Alsdann haben die Gleichungen

$$(\zeta.) \quad \begin{cases} a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha n} u_n + a_\alpha u + a_\alpha^{(1)} u_{n+1} + \dots + a_\alpha^{(k)} u_{n+k} = 0, & (\alpha = 1, \dots n) \\ a_1 u_1 \;\; + \dots + a_n u_n \;\; = 0, & \\ a_1^{(\varkappa)} u_1 + \dots + a_n^{(\varkappa)} u_n = 0 & (\varkappa = 1, \dots k) \end{cases}$$

$n+1+k-m$ verschiedene Lösungen. Damit dann auch in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(k)} & a_1^{(k+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(k)} & a_n^{(k+1)} \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(k)} & \dots & -a_n^{(k)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1^{(k+1)} & \dots & -a_n^{(k+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist nothwendig

und hinreichend, dass alle Lösungen der Gleichungen (ζ.) auch die Gleichung

$$a_1^{(k+1)}u_1+\cdots+a_n^{(k+1)}u_n = 0$$

befriedigen. Es muss also

$$(\eta.) \quad a_1^{(k+1)}, \ \ldots \ a_n^{(k+1)}$$

allen Gleichungen genügen, die man aus

$$(\vartheta.) \quad A_1u_1+\cdots+A_nu_n = 0$$

erhält, indem man für $A_1, \ldots A_n$ der Reihe nach alle Werthe setzt, die sich für die ersten n Unbekannten aus den Gleichungen (ζ.) ergeben. Die Anzahl der Gleichungen (ϑ.) beträgt höchstens $n+1+k-m$; sie haben daher wenigstens $n-(n+1+k-m) = m-k-1$ verschiedene Lösungen. Zufolge der letzten $k+1$ Gleichungen (ζ.) befinden sich darunter

$$(\iota.) \quad a_1, \ \ldots \ a_n,$$

$$(\varkappa.) \quad a_1^{(\varkappa)}, \ \ldots \ a_n^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, \ldots k).$$

Wenn die Relation (18.) die Gestalt $U = c_1U_1+\cdots+c_kU_k$ hat, so sind von diesen $k+1$ Lösungen nur die k letzten unabhängig. Die Gleichungen (ϑ.) haben dann noch $m-2k-1$ von diesen verschiedene Lösungen, also mindestens eine, so lange $k<r$ ist. Irgend eine dieser $m-2k-1$ Lösungen nehme man für (η.).

Wenn die Relation (18.) aber die Gestalt $U = c_1U_1+\cdots+c_kU_k+c_{k+1}U_{k+1}$ hat, wo c_{k+1} von Null verschieden ist, so ist nach den getroffenen Festsetzungen die Lösung (ι.) von den k Lösungen ($\varkappa$.) unabhängig. Daher ist auch die Lösung

$$a_1^{(k+1)} = \frac{a_1-c_1a_1^{(1)}-\cdots-c_ka_1^{(k)}}{c_{k+1}}, \quad \ldots \quad a_n^{(k+1)} = \frac{a_n-c_1a_n^{(1)}-\cdots-c_ka_n^{(k)}}{c_{k+1}}$$

von den k Lösungen ($\varkappa$.) unabhängig, und muss für (η.) genommen werden, damit der Relation (18.) genügt wird. Dieser Fall tritt, wenn nicht schon vorher, spätestens für $k = r-1$ ein.

Ist aber $k<r-1$, so ist noch der dritte Fall möglich, dass die Relation (18.) keine der beiden erwähnten Gestalten hat. Dann sind nach der Annahme die $k+1$ Lösungen (ι.) und ($\varkappa$.) unabhängig, und die Gleichungen (ϑ.) haben noch $m-2k-2\,(>0)$ von diesen verschiedene Lösungen, von denen man irgend eine für (η.) nehmen kann.

Da man also immer, so lange $k<r$ ist, noch eine neue von $U_1, \ldots U_k$ unabhängige Form U_{k+1} finden kann, welche den gestellten Bedingungen

Genüge leistet, so ist damit bewiesen, dass sich r unabhängige lineare Formen $U_1, \dots U_r$ so bestimmen lassen, dass in der Determinante (17.) m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, und dass zwischen ihnen und der Form U eine vorgeschriebene Relation (18.) besteht.

§. 9.

Die reducirte Form der Formenpaare gerader Classe.

Da die Formen $U_1, \dots U_r$ unabhängig sind, so sind die partialen Determinanten r^{ten} Grades ihrer Coefficienten nicht alle Null. Sei etwa

$$R = \Sigma \pm a_1^{(1)} \dots a_r^{(r)}$$

von Null verschieden. Dann ist auch die partiale Determinante $2r^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_r^{(1)} & \dots & a_r^{(r)} \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_r^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(r)} & \dots & -a_r^{(r)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = R^2$$

der Determinante (17.) von Null verschieden. Dagegen verschwinden in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(r)} \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(r)} & \dots & -a_n^{(r)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

welche eine Unterdeterminante von (17.) ist, alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades. Unter den Gleichungen

$$(\alpha.) \quad a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha n} u_n + a_\alpha^{(1)} u_{n+1} + \dots + a_\alpha^{(r)} u_{n+r} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

$$(\beta.) \quad a_1^{(\varrho)} u_1 + \dots + a_n^{(\varrho)} u_n = 0 \qquad (\varrho = 1, \dots r)$$

sind daher nur $2r$, die r ersten und die r letzten, unter einander unabhängig. Um sie aufzulösen, kann man für $u_1, \dots u_n$ irgend eine Lösung der Gleichungen (β.) nehmen. Denn da R von Null verschieden ist, kann man immer aus den r ersten Gleichungen (α.) dazu passende Werthe von $u_{n+1}, \dots u_{n+r}$ finden. Sind nun

$$A_1, \; \dots \; A_n, \; A_{n+1}, \; \dots \; A_{n+r}$$
$$B_1, \; \dots \; B_n, \; B_{n+1}, \; \dots \; B_{n+r}$$

irgend zwei Lösungen der Gleichungen (α.) und (β.), sind also

$$A_1, \; \dots \; A_n \quad \text{und} \quad B_1, \; \dots \; B_n$$

irgend zwei Lösungen der Gleichungen (β.), so ist

$$a_{\alpha 1} B_1 + \cdots + a_{\alpha n} B_n + a_\alpha^{(1)} B_{n+1} + \cdots + a_\alpha^{(r)} B_{n+r} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots n)$$
$$a_1^{(\varrho)} A_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} A_n = 0 \qquad (\varrho = 1, \dots r).$$

Multiplicirt man daher die n ersten Gleichungen der Reihe nach mit $A_1, \dots A_n$ und addirt sie, so erhält man in Folge der r letzten Gleichungen

$$\sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = 0.$$

Es verschwindet also die bilineare Form W, wenn man für die Variablen irgend zwei Lösungen der Gleichungen $U_1 = 0, \dots U_r = 0$ setzt.

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Gleichungen die kleinste Anzahl congruenter linearer Relationen bilden, die zwischen den Variablen der bilinearen Form W bestehen müssen, damit sie verschwindet. Denn sei $W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$ eine bilineare Form, die nicht alternirend zu sein braucht, und über deren Determinante vorläufig nichts vorausgesetzt wird. Seien ferner

$$U_\varrho = a_1^{(\varrho)} u_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} u_n \qquad (\varrho = 1, \dots r)$$

r unabhängige lineare Formen, wo r zunächst eine unbestimmte Zahl ist. Wir nehmen an, dass $W = 0$ ist, wenn für die Variablen irgend zwei Lösungen der Gleichungen $U_1 = 0, \dots U_r = 0$ gesetzt werden.

Ist dann $B_1, \dots B_n$ irgend eine Lösung dieser Gleichungen, ist also

$$(\gamma.) \qquad a_1^{(\varrho)} B_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} B_n = 0, \quad (\varrho = 1, \dots r)$$

so ist

$$\sum_\alpha \Big(\sum_\beta a_{\alpha\beta} B_\beta\Big) u_\alpha$$

eine lineare Form, welche verschwindet, wenn die Formen $U_1, \dots U_r$ sämmtlich Null sind. Daher müssen sich r Multiplicatoren $B_{n+1}, \dots B_{n+r}$ so bestimmen lassen, dass

$$\sum_\alpha \Big(\sum_\beta a_{\alpha\beta} B_\beta\Big) u_\alpha = -B_{n+1} U_1 - \cdots - B_{n+r} U_r$$

ist. Die Werthe der Multiplicatoren bestimmen sich aus r der n Gleichungen

$$(\delta.) \qquad \sum_\beta a_{\alpha\beta} B_\beta + a_\alpha^{(1)} B_{n+1} + \cdots + a_\alpha^{(r)} B_{n+r} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

welche so auszuwählen sind, dass in ihnen die Determinante r^{ten} Grades

der Coefficienten $a_\alpha^{(\varrho)}$ nicht verschwindet. Die so bestimmten Werthe genügen dann auch den übrigen $n-r$ Gleichungen (δ.). Die Gleichungen (γ.) und (δ.) sind zusammen $n+r$ Gleichungen zwischen den Grössen $B_1, \dots B_n, B_{n+1}, \dots B_{n+r}$, und alle Werthe der Unbekannten, welche $2r$ dieser Gleichungen (nämlich die r Gleichungen (γ.) und passende r der Gleichungen (δ.)) befriedigen, genügen auch den übrigen $n-r$. Daher müssen in der aus den Coefficienten dieser Gleichungen gebildeten Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(r)} \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(r)} & \dots & -a_n^{(r)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Wenn daher in der Determinante $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, welche eine partiale Determinante jener Determinante ist, m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, so ist es nicht möglich, weniger als $\frac{m}{2}$ oder $\frac{m+1}{2}$ congruente lineare Relationen zwischen den Variablen $u_1, \dots u_n$ und $v_1, \dots v_n$ so zu bestimmen, dass die bilineare Form W verschwindet.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu unseren ursprünglichen Annahmen zurück. Seien $U'_{r+1}, \dots U'_n$ irgend $n-r$ lineare Formen von $u_1, \dots u_n$, welche zusammen mit $U_1, \dots U_r$ n unabhängige Formen bilden. Die nämlichen Formen mit den Variablen $v_1, \dots v_n$ mögen mit $V_1, \dots V_r$, $V'_{r+1}, \dots V'_n$ bezeichnet werden. Führt man diese Grössen als neue Variable in W ein, und bezeichnet in der transformirten Form den Factor von U_ϱ mit $V_{r+\varrho}$ und den von V_ϱ mit $-U_{r+\varrho}$, so wird

$$W = \Sigma_{\varrho}{}_1^r U_\varrho V_{r+\varrho} - U_{r+\varrho} V_\varrho + W_1,$$

wo W_1 eine bilineare Form von $U'_{r+1}, \dots U'_n; V'_{r+1}, \dots V'_n$ ist, die identisch verschwindet. Denn sie wird, ebenso wie W, gleich Null, wenn die $2r$ Grössen U_ϱ und V_ϱ verschwinden, also ohne dass zwischen ihren Variablen eine Relation besteht.

Da die auf W angewendete Substitution eine congruente war, so bleibt W eine alternirende Form. In einer solchen unterscheiden sich aber

die Factoren von U_ϱ und $-V_\varrho$ nur durch die Bezeichnung der Variablen, d. h. die Coefficienten der linearen Function $V_{r+\varrho}$ der Variablen $U_1, \dots U_r$, $U'_{r+1}, \dots U'_n$ stimmen mit den Coefficienten der linearen Function $U_{r+\varrho}$ der Variablen $V_1, \dots V_r, V'_{r+1}, \dots V'_n$ der Reihe nach überein. Daher muss auch, wenn, durch die ursprünglichen Variablen ausgedrückt,

$$U_{r+\varrho} = a_1^{(r+\varrho)} u_1 + \cdots + a_n^{(r+\varrho)} u_n$$

ist,

$$V_{r+\varrho} = a_1^{(r+\varrho)} v_1 + \cdots + a_n^{(r+\varrho)} v_n$$

sein.

Die Gleichung

$$(18.) \qquad U = c_1 U_1 + \cdots + c_r U_r$$

und die Gleichung

$$(19.) \qquad W = \sum_\varrho{}_1^r U_\varrho V_{r+\varrho} - U_{r+\varrho} V_\varrho$$

enthalten eine eigenthümliche Umgestaltung des gegebenen Formenpaares. Ehe wir aber weitere Folgerungen daraus ziehen, wollen wir kurz die Frage erledigen, ob die Formen U und W noch in einer anderen, als der hier gelehrten Weise auf die Formen (18.) und (19.) reducirt werden können.

Sei r eine vorläufig beliebige Zahl, und seien

$$U_\varrho = a_1^{(\varrho)} u_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} u_n \qquad (\varrho = 1, \dots 2r)$$

$2r$ lineare Formen, die zunächst nicht unabhängig zu sein brauchen. Ist ferner

$$V_\varrho = a_1^{(\varrho)} v_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} v_n,$$

so ist

$$\sum_\varrho{}_1^r U_\varrho V_{r+\varrho} - U_{r+\varrho} V_\varrho = \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

eine alternirende bilineare Form. Ausserdem betrachten wir die lineare Form

$$\sum_\varrho{}_1^r c_\varrho U_\varrho = \sum_\alpha{}_1^n a_\alpha u_\alpha,$$

wo $c_1, \dots c_r$ gegebene Constanten sind.

Die Coefficienten dieser beiden Formen sind durch die Gleichungen

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\varrho{}_1^r a_\alpha^{(\varrho)} a_\beta^{(r+\varrho)} - a_\alpha^{(r+\varrho)} a_\beta^{(\varrho)},$$

$$a_\alpha = \sum_\varrho{}_1^r c_\varrho a_\alpha^{(\varrho)}$$

bestimmt. Durch zeilenweise Zusammensetzung der beiden Elementensysteme

$$\begin{matrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(r)} & a_1^{(r+1)} & \dots & a_1^{(2r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(r)} & a_n^{(r+1)} & \dots & a_n^{(2r)} \\ 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & c_r \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1^{(r+1)} & \dots & a_1^{(2r)} & -a_1^{(1)} & \dots & -a_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(r+1)} & \dots & a_n^{(2r)} & -a_n^{(1)} & \dots & -a_n^{(r)} \\ c_1 & \dots & c_r & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$$

erhält man daher die Determinante

$$(20.) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(r)} & a_1^{(r+1)} & \dots & a_1^{(2r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(r)} & a_n^{(r+1)} & \dots & a_n^{(2r)} \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & c_r \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(r)} & \dots & -a_n^{(r)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1^{(r+1)} & \dots & -a_n^{(r+1)} & -c_1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(2r)} & \dots & -a_n^{(2r)} & -c_r & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Da jedes der beiden Systeme, aus denen diese Determinante zusammengesetzt ist, nur $2r$ Colonnen enthält, so müssen in derselben alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Dieser Satz lässt sich leicht umkehren. Wenn in der Determinante (20.) alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so gilt dies auch für das Elementensystem, das man aus (20.) durch Unterdrückung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Colonne erhält. Die aus den letzten $2r$ Zeilen und Colonnen gebildete Determinante ist gleich 1, also nicht 0. Bestimmt man daher die Werthe der Unbekannten

$$v_1, \quad \dots \quad v_n, \quad -V_{r+1}, \quad \dots \quad -V_{2r}, \quad V_1, \quad \dots \quad V_r$$

aus $2r$ linearen Gleichungen, deren Coefficienten die Elemente der letzten $2r$ Zeilen jenes Elementensystems sind, so genügen dieselben auch jeder Gleichung, deren Coefficienten die Elemente irgend einer Zeile desselben

bilden. Aus den $2r$ Gleichungen

$$a_1^{(\varrho)}v_1+\cdots+a_n^{(\varrho)}v_n = V_\varrho \qquad (\varrho=1,\ldots 2r)$$

folgen also die Gleichungen

$$a_1v_1+\cdots+a_nv_n = c_1V_1+\cdots+c_rV_r,$$
$$a_{\alpha1}v_1+\cdots+a_{\alpha n}v_n = a_\alpha^{(1)}V_{r+1}+\cdots+a_\alpha^{(r)}V_{2r}-a_\alpha^{(r+1)}V_1-\cdots-a_\alpha^{(2r)}V_r \quad (\alpha=1,\ldots n).$$

Multiplicirt man die letztere mit u_α und summirt nach α, so erhält man, wenn man noch zur Abkürzung

$$a_1^{(\varrho)}u_1+\cdots+a_n^{(\varrho)}u_n = U_\varrho \qquad (\varrho=1,\ldots 2r)$$

setzt,

$$(19.) \qquad \sum_{\alpha,\beta}{}_1^n a_{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta = \sum_\varrho{}_1^r U_\varrho V_{r+\varrho}-U_{r+\varrho}V_\varrho.$$

Da die Determinante (11.) eine Unterdeterminante von (20.) ist, so müssen auch in ihr alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Daraus ergiebt sich leicht, dass auf dem oben angegebenen Wege alle Transformationen der Formen U und W in die Formen (18.) und (19.) gefunden werden.

§. 10.

Allgemeinste Transformation zweier Formenpaare von gleicher Invariante $p=2r$ in einander.

Unter den im vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen müssen in der Determinante (15.), die eine Unterdeterminante von (20.) ist, alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, weil sie durch Zusammensetzung der beiden Elementensysteme

$$\begin{matrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_1^{(r)} & a_1^{(r+1)} & \ldots & a_1^{(2r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(1)} & \ldots & a_n^{(r)} & a_n^{(r+1)} & \ldots & a_n^{(2r)} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1^{(r+1)} & \ldots & a_1^{(2r)} & -a_1^{(1)} & \ldots & -a_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{(r+1)} & \ldots & a_n^{(2r)} & -a_n^{(1)} & \ldots & -a_n^{(r)} \end{matrix}$$

entsteht. Wenn in diesen Systemen die Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades sämmtlich Null wären, wenn also die $2r$ Formen $U_1, \ldots U_{2r}$ nicht unabhängig wären, so würden auch in (15.) alle partialen Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Ist also $2r$ gleich dem höchsten Grade m der in (15.) nicht verschwindenden Unterdeterminanten, so müssen jene $2r$ Formen unabhängig sein. Folglich ist die rechte Seite der Gleichung (19.) eine alternirende bilineare Form der $2.2r$ *unabhängigen* Variablen $U_1, \ldots U_{2r};\ V_1, \ldots V_{2r}$,

während die rechte Seite von (18.) eine lineare Form von $U_1, \dots U_r$ ist. Diese Formen sollen die ***reducirten Formen*** von U und W genannt werden.

Bei dieser Reduction ist weiter keine Annahme über das gegebene Formenpaar gemacht worden, als dass seine Invariante p den Werth $m = 2r$ habe. Ist also ein zweites Formenpaar derselben Invariante gegeben, so lässt es sich auf die Gestalt

$$\Sigma a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta = \sum_\varrho {}_1^r U'_\varrho V'_{r+\varrho} - U'_{r+\varrho} V'_\varrho,$$

$$\Sigma a'_\alpha u'_\alpha = \sum_\varrho {}_1^r c_\varrho U'_\varrho$$

bringen, wo $U'_1, \dots U'_{2r}$ $2r$ unabhängige lineare Formen von $u'_1, \dots u'_n$, und $V'_1, \dots V'_{2r}$ die nämlichen Formen von $v'_1, \dots v'_n$ sind, und wo man für $c_1, \dots c_r$ dieselben Grössen nehmen kann, wie in (18.) *).

Setzt man daher

$$U_\varrho = U'_\varrho \quad \text{und} \quad V_\varrho = V'_\varrho \qquad (\varrho = 1, \dots 2r),$$

so wird das erste Formenpaar mit dem zweiten identisch. Da $U_1, \dots U_{2r}$ (und ebenso $U'_1, \dots U'_{2r}$) unabhängig sind, so kann man zu diesen $2r$ linearen Formen noch $n-2r$ andere $U_{2r+1}, \dots U_n$ ($U'_{2r+1}, \dots U'_n$) hinzufügen, die mit ihnen zusammen n unabhängige Formen von $u_1, \dots u_n$ ($u'_1, \dots u'_n$) bilden. Löst man dann die Gleichungen

$$U_\alpha = U'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

nach $u_1, \dots u_n$ oder $u'_1, \dots u'_n$ auf, so erhält man eine Substitution, welche mit der congruenten die beiden gegebenen Formenpaare in einander überführt. Folglich ist für zwei Formenpaare die Uebereinstimmung der Invariante $p = 2r$ die hinreichende Aequivalenzbedingung **).

Es ist leicht zu beweisen, dass auf diesem Wege alle (congruenten) Transformationen der beiden Formenpaare in einander gefunden werden. Denn sei (5.) irgend eine Substitution, vermöge deren

$$\Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = \Sigma a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta \quad \text{und} \quad \Sigma a_\alpha u_\alpha = \Sigma a'_\alpha u'_\alpha$$

---

*) Sollten $a_1, \dots a_n$ alle Null sein, so wäre dies nur möglich, wenn auch $a'_1, \dots a'_n$ alle verschwinden.

**) Dazu kommt noch selbstverständlich die Bedingung, dass zugleich mit $a_1, \dots a_n$ auch $a'_1, \dots a'_n$ alle verschwinden.

wird. Dann lassen sich, wenn $c_1, \dots c_r$ gegebene Constanten sind, $2r$ unabhängige lineare Formen U'_ϱ von $u'_1, \dots u'_n$ so bestimmen, dass

$$\Sigma a'_{\alpha\beta} u'_\alpha v'_\beta = \Sigma U'_\varrho V'_{r+\varrho} - U'_{r+\varrho} V'_\varrho \quad \text{und} \quad \Sigma a'_\alpha u'_\alpha = \Sigma c_\varrho U'_\varrho$$

ist, wo V'_ϱ dieselbe Function von $v'_1, \dots v'_n$ ist, wie U'_ϱ von $u'_1, \dots u'_n$. Wenn nun U'_ϱ und V'_ϱ durch die inverse Substitution (5*.) in U_ϱ und V_ϱ übergehen, so verwandeln sich diese Gleichungen durch dieselbe in

$$\Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = \Sigma U_\varrho V_{r+\varrho} - U_{r+\varrho} V_\varrho \quad \text{und} \quad \Sigma a_\alpha u_\alpha = \Sigma c_\varrho U_\varrho.$$

Nach §. 9 sind daher die Functionen U_ϱ und V_ϱ unter denen enthalten, welche durch das in §. 8 und §. 9 angegebene Verfahren gefunden werden. Zu den aus (5.) folgenden $2r$ Gleichungen $U_\varrho = U'_\varrho$ kann man stets noch $n-2r$ hinzufügen, welche zusammen mit jenen $2r$ die Gleichungen (5.) vollständig ersetzen. Bringt man also von zwei gegebenen Formenpaaren das eine in einer bestimmten und das andere in der allgemeinsten Weise auf die reducirte Form, so enthalten die Gleichungen

$$U_\varrho = U'_\varrho \qquad (\varrho = 1, \dots 2r)$$

die allgemeinste (congruente) Transformation der beiden Formenpaare in einander. Jede Transformation kann folglich auf eine solche Gestalt gebracht werden, dass sie nur $p (= 2r)$ nothwendige, dagegen $n-p$ überflüssige Gleichungen enthält, welche fortgelassen werden können, ohne dass die Substitution aufhört, das eine Formenpaar in das andere überzuführen.

§. 11.

Die Aequivalenz der Formenpaare von ungerader Invariante $p = 2r+1$.

Der Fall, dass die Invariante p des gegebenen Formenpaars eine ungerade Zahl $m+1 = 2r+1$ ist, dass also in der Determinante (15.) m, in (16.) aber $m+2$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, lässt sich leicht auf den eben behandelten zurückführen. In diesem Falle gehört die lineare Form U zu der zweiten der in §. 7 näher charakterisirten Gruppen, lässt sich aber leicht durch Subtraction einer anderen linearen Form

$$U_0 = a_1^{(0)} u_1 + \dots + a_n^{(0)} u_n$$

in eine Form der ersten Gruppe verwandeln.

Man kann z. B. $U_0 = U$ nehmen. Die allgemeinste derartige Form erhält man aber, indem man $U_0 - U$ gleich einer homogenen linearen Function der Ableitungen von W mit willkürlichen Coefficienten setzt. Da dann

die Invariante des Formenpaares $U-U_0$, W gleich $2r$ ist, so kann man die linearen Formen

$$\begin{aligned} U_\varrho &= a_1^{(\varrho)} u_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} u_n, \\ V_\varrho &= a_1^{(\varrho)} v_1 + \cdots + a_n^{(\varrho)} v_n, \end{aligned} \qquad (\varrho = 1, \ldots 2r)$$

so bestimmen, dass

$$(18^*.) \qquad U = U_0 + \sum_\varrho {}_1^r c_\varrho U_\varrho,$$

$$(19^*.) \qquad W = \sum_\varrho {}_1^r U_\varrho V_{r+\varrho} - U_{r+\varrho} V_\varrho$$

wird, wo $c_1, \ldots c_r$ beliebig gegebene Constanten sind, die im Falle $U_0 = U$ alle gleich Null sein müssen, sonst aber nicht alle verschwinden dürfen. Wenn umgekehrt die Formen U und W in irgend einer Weise auf die Gestalt (18*.) und (19*.) gebracht sind, so ist die Invariante des Formenpaars $U-U_0$, W gleich $2r$, und daher wird U_0 in der oben angegebenen Weise gefunden, und dann liefert das in §. 8 und §. 9 angegebene Verfahren die Formen $U_1, \ldots U_{2r}$. Der hier eingeschlagene Weg führt also zu der allgemeinsten Reduction des gegebenen Formenpaars auf die Formen (18*.) und (19*.).

Aus diesen Gleichungen folgt aber, dass

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\varrho {}_1^r a_\alpha^{(\varrho)} a_\beta^{(r+\varrho)} - a_\alpha^{(r+\varrho)} a_\beta^{(\varrho)},$$

$$a_\alpha = c_0 + \sum_\varrho {}_1^r c_\varrho a_\alpha^{(\varrho)}$$

ist. Daher entsteht die Determinante (16.) durch Zusammensetzung der beiden Elementensysteme

$$\begin{matrix} 0 & a_1^{(0)} & a_1^{(1)} & \ldots & a_1^{(r)} & a_1^{(r+1)} & \ldots & a_1^{(2r)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & a_n^{(0)} & a_n^{(1)} & \ldots & a_n^{(r)} & a_n^{(r+1)} & \ldots & a_n^{(2r)} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 & \ldots & c_r \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -a_1^{(0)} & 0 & a_1^{(r+1)} & \ldots & a_1^{(2r)} & -a_1^{(1)} & \ldots & -a_1^{(r)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ -a_n^{(0)} & 0 & a_n^{(r+1)} & \ldots & a_n^{(2r)} & -a_n^{(1)} & \ldots & -a_n^{(r)} \\ 0 & 1 & c_1 & \ldots & c_r & 0 & \ldots & 0. \end{matrix}$$

Da nun in der Determinante (16.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten $2r+2$ ist, so können in diesen Systemen nicht alle Determinanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und daher sind in dem Elementensystem

$$a_\alpha^{(0)} \quad a_\alpha^{(1)} \quad \ldots \quad a_\alpha^{(r)} \quad a_\alpha^{(r+1)} \quad \ldots \quad a_\alpha^{(2r)} \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

nicht alle Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades Null. Folglich sind die $2r+1$ linearen Formen $U_0, U_1, \ldots U_{2r}$ unabhängig, und die rechten Seiten der

Gleichungen sind eine lineare und eine alternirende bilineare Form der $2r+1$ ***unabhängigen*** Variablen $U_0, U_1, \dots U_{2r}$. Dieselben sollen die ***reducirten Formen*** von U und W genannt werden.

Nunmehr lassen sich die im vorigen Paragraphen für die Formenpaare gerader Invariante abgeleiteten Sätze ohne Weiteres auf die ungerader Invariante übertragen. Für zwei gegebene Formenpaare ist die Uebereinstimmung der Invariante p die hinreichende Aequivalenzbedingung. Die allgemeinste Transformation zweier Formenpaare p^{ter} Klasse in einander wird gefunden, indem man das eine in einer bestimmten, das andere in der allgemeinsten Weise auf die reducirte Form bringt, und dann die p Variablen der einen reducirten Form denen der andern der Reihe nach gleich setzt. Jede Substitution kann auf eine solche Gestalt gebracht werden, dass sie nur p nothwendige, dagegen $n-p$ überflüssige Gleichungen enthält.

§. 12.

Ueber die Transformation einer bilinearen Form in eine andere mit weniger Variablen.

Die Ableitungen der bilinearen Form

$$W = \sum_{\alpha,\beta}^{n} {}_1 a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

(die nicht alternirend zu sein braucht) mögen mit

$$U_\alpha = \frac{\partial W}{\partial u_\alpha} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta, \quad V_\beta = \frac{\partial W}{\partial v_\beta} = \sum_\alpha a_{\alpha\beta} u_\alpha$$

bezeichnet werden. Geht sie durch die Substitutionen

$$(\alpha.) \qquad u_\alpha = \sum_{\varkappa}^{n} {}_1 x_{\alpha\varkappa} u'_\varkappa, \quad v_\beta = \sum_{\lambda}^{n} {}_1 y_{\beta\lambda} v'_\lambda,$$

deren Determinanten von Null verschieden sind, in

$$W' = \sum a'_{\varkappa\lambda} u'_\varkappa v'_\lambda$$

über, so ist

$$a'_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} y_{\beta\lambda},$$

oder wenn

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} y_{\beta\lambda} = U_{\alpha\lambda}, \quad \sum_\alpha a_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} = V_{\beta\varkappa}$$

gesetzt wird,

$$a'_{\varkappa\lambda} = \sum_\alpha x_{\alpha\varkappa} U_{\alpha\lambda} = \sum_\beta y_{\beta\lambda} V_{\beta\varkappa}.$$

Die Form W' möge nur die Variablen $u'_1, \dots u'_m;\ v'_1, \dots v'_m$ enthalten. Bezeichnet also ν eine Zahl von $m+1$ bis n, $\varkappa$ und λ aber Zahlen

von 1 bis n, so muss

$$a'_{\varkappa\nu} = 0, \quad a'_{\nu\lambda} = 0$$

sein. Da aber die Determinante $|x_{\alpha\varkappa}|$ der n linearen Gleichungen

$$a'_{\varkappa\nu} = \sum_\alpha x_{\alpha\varkappa} U_{\alpha\nu} = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots n)$$

von Null verschieden ist, so muss

$$U_{\alpha\nu} = \sum_\beta a_{\alpha\beta}\, y_{\beta\nu} = 0$$

sein, es müssen also

$$(\beta.) \qquad y_{1\nu}, \quad \ldots \quad y_{n\nu} \qquad (\nu = m+1, \ldots n)$$

$n-m$ Lösungen der Gleichungen

$$(\gamma.) \qquad U_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta}\, v_\beta = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots n)$$

sein. Da die Determinante n^{ten} Grades $|y_{\beta\lambda}|$ von Null verschieden ist, so können auch nicht alle partialen Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades des Systems $y_{\beta\nu}$ verschwinden, und daher sind die $n-m$ Lösungen $(\beta.)$ unabhängig. Ebenso sind

$$(\delta.) \qquad x_{1\nu}, \quad \ldots \quad x_{n\nu} \qquad (\nu = m+1, \ldots n)$$

$n-m$ unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$(\varepsilon.) \qquad V_\beta = \sum_\alpha a_{\alpha\beta}\, u_\alpha = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots n).$$

Damit aber die Gleichungen $(\gamma.)$ oder $(\varepsilon.)$ $n-m$ verschiedene Lösungen haben, müssen in dem Elementensystem $a_{\alpha\beta}$ alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt ist, so haben die Gleichungen $(\gamma.)$ $n-m$ verschiedene Lösungen $(\beta.)$ und die Gleichungen $(\varepsilon.)$ $n-m$ verschiedene Lösungen $(\delta.)$. Da die Lösungen $(\beta.)$ unabhängig sind, so kann man die Grössen

$$y_{1\mu}, \quad \ldots \quad y_{n\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

so bestimmen, dass die Determinante n^{ten} Grades $|y_{\beta\lambda}|$ nicht Null ist. Desgleichen kann man die Grössen

$$x_{1\mu}, \quad \ldots \quad x_{n\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

so wählen, dass $|x_{\alpha\varkappa}|$ nicht verschwindet. Dann verwandelt sich die Form W durch die Substitutionen $(\alpha.)$ in eine Form W', welche nur noch m Variablen jeder Reihe enthält, und wie oben bewiesen, ist dies die allgemeinste Weise, eine bilineare Form, in deren Coefficientensysteme alle

partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, in eine andere von m Variablenpaaren zu transformiren.

Wenn die Form W symmetrisch oder alternirend ist, so sind die Gleichungen $(\gamma.)$ mit den Gleichungen $(\varepsilon.)$ identisch. Daher kann man zunächst

$$y_{\alpha\nu} = x_{\alpha\nu} \qquad (\nu = m+1, \dots n)$$

und dann auch

$$y_{\alpha\mu} = x_{\alpha\mu} \qquad (\mu = 1, \dots m)$$

wählen, so dass die Substitutionen $(\alpha.)$ congruent werden. (Vgl. ***Darboux***, *Liouv.* Journ., Ann. 1874, p. 359—365.)

Ueber die Integrabilitätsbedingungen für ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

§. 13.

Ueber adjungirte Systeme totaler und partieller Differentialgleichungen.

Sei

$$(21.)\qquad a_1^{(\mu)}dx_1+\cdots+a_n^{(\mu)}dx_n \;=\; 0 \qquad (\mu=1,\ \ldots\ m)$$

ein System von $m(<n)$ unabhängigen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Coefficienten $a_\alpha^{(\mu)}$ gegebene Functionen von $x_1,\ \ldots\ x_n$ sind. Die Differentialgleichungen heissen unabhängig, wenn keine unter ihnen aus den anderen linear zusammengesetzt werden kann, oder wenn die Determinanten m^{ten} Grades der Coefficienten nicht alle verschwinden. Multiplicirt man sie mit irgend welchen Functionen von $x_1,\ \ldots\ x_n$ und addirt sie, so sagen wir von einer solchen linearen Verbindung

$$(22.)\qquad a_1dx_1+\cdots+a_ndx_n \;=\; 0,$$

sie gehöre ebenfalls dem Systeme (21.) an. Auch kann dieses Gleichungssystem durch irgend m unabhängige lineare Verbindungen seiner Gleichungen ersetzt werden.

Es kann sein, dass sich unter den linearen Verbindungen der Differentialausdrücke (21.) auch eine findet, welche das vollständige Differential df einer Function $f(x_1,\ldots x_n)$ ist. Dann nennen wir die Gleichung $f=\alpha$, wo α eine willkürliche Constante ist, ein Integral der Differentialgleichungen (21.). Mehrere Functionen $f_1,\ f_2,\ \ldots$ sind bekanntlich unabhängig oder nicht, je nachdem ihre Differentiale $df_1,\ df_2,\ \ldots$ unabhängige lineare Functionen der Differentiale $dx_1,\ \ldots\ dx_n$ sind, oder nicht. Aus dieser Bemerkung folgt, dass m Differentialgleichungen (21.) nicht mehr als m unabhängige (verschiedene) Integrale haben können. Denn es lassen sich überhaupt nicht mehr als m verschiedene Verbindungen der Differentialausdrücke (21.) bilden, also auch nicht mehr als m solche, die vollständige Differentiale sind.

Ein System von m linearen Differentialgleichungen, das m unabhängige Integrale hat, soll ein *vollständiges System* genannt werden. Ist $m=n-1$ (oder n), so ist das System (21.) stets ein vollständiges.

Je nachdem sich der Ausdruck

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

linear aus den Ausdrücken (21.) zusammensetzen lässt, oder nicht, verschwinden in dem Elementensystem

$$(23^*.) \quad \begin{cases} a_1^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_1^{(m)} & \ldots & a_n^{(m)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{cases}$$

alle oder nicht alle Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades. Setzt man aber diese Determinanten gleich Null, so erhält man ein System homogener linearer partieller Differentialgleichungen (Vgl. *Hamburger*, dieses Journal Bd. 81, S. 252), das demnach ebenso viele Lösungen hat, wie das System (21.) Integrale. Damit aber alle Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades in (23*.) verschwinden, ist nothwendig und hinreichend, dass alle Werthe von $u_1, \ldots u_n$, welche den Gleichungen

$$(10.) \quad a_1^{(\mu)} u_1 + \cdots + a_n^{(\mu)} u_n = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

genügen, auch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n = 0$$

befriedigen. Sind also

$$(12.) \quad A_1^{(\nu)}, \ \ldots \ A_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, \ldots n-m)$$

$n-m$ verschiedene Lösungen der Gleichungen (10.), so sind

$$(23.) \quad A_1^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n^{(\nu)} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots n-m)$$

$n-m$ unabhängige partielle Differentialgleichungen, denen jede Function f genügt, welche, gleich einer willkürlichen Constanten gesetzt, ein Integral der totalen Differentialgleichungen (21.) bildet. Daher soll (23.) oder (23*.) das dem System totaler Differentialgleichungen (21.) *adjungirte* oder *zugehörige* System partieller Differentialgleichungen genannt werden. (Vgl. *Boole,* Differential-Equations, Suppl. Vol. Chapt. XXV, p. 75–78.) Ist das System (21.) ein vollständiges, so ist die Anzahl m der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (23.) gleich der Differenz zwischen der Anzahl der unabhängigen Variablen n und der Anzahl der Gleichungen $n-m$.

Ein solches System wird nach *Clebsch* (dieses Journal, Bd. 65, p. 258) ein vollständiges genannt.

Sei jetzt umgekehrt ein System von $n-m$ unabhängigen partiellen Differentialgleichungen (23.) gegeben. Zu demselben rechnen wir auch jede lineare Verbindung dieser Gleichungen. Haben dieselben eine Lösung f, so haben die linearen Gleichungen

$$(13.)\qquad A_1^{(\nu)}u_1+\cdots+A_n^{(\nu)}u_n=0 \qquad (\nu=1,\ \dots\ n-m)$$

die Lösung

$$u_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \dots\quad u_n=\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Sind nun

$$(14.)\qquad a_1^{(\mu)},\quad \dots\quad a_n^{(\mu)} \qquad (\mu=1,\ \dots\ m)$$

m unabhängige Lösungen der Gleichungen (13.), so lässt sich aus ihnen jede particuläre Lösung, also auch die eben erwähnte, linear zusammensetzen. Folglich lässt sich der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

aus den Ausdrücken

$$a_1^{(\mu)}dx_1+\cdots+a_n^{(\mu)}dx_n \qquad (\mu=1,\ \dots\ m)$$

linear zusammensetzen, und daher ist nach der obigen Definition die Gleichung $f=\alpha$ ein Integral der Differentialgleichungen (21.). Da dieselben gebildet werden, indem jede Lösung der linearen Gleichungen (13.) in die Gleichung

$$dx_1\,u_1+\cdots+dx_n\,u_n\ =\ 0$$

eingesetzt wird, so können sie auch erhalten werden, indem die Determinanten $(n-m+1)^{\text{ten}}$ Grades des Elementensystems

$$(21^*.)\qquad \left\{\begin{matrix} A_1^{(1)} & \dots & A_n^{(1)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_1^{(n-m)} & \dots & A_n^{(n-m)} \\ dx_1 & \dots & dx_n \end{matrix}\right.$$

gleich Null gesetzt werden.

Das Gleichungssystem (21.) oder (21*.) soll das dem System par-

tieller Differentialgleichungen (23.) ***zugeordnete*** oder ***adjungirte*** System totaler Differentialgleichungen genannt werden.

Die Anzahl der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (23.) ist gleich der Anzahl der Integrale der zugeordneten totalen Differentialgleichungen (21.). Je nachdem die einen ein vollständiges System bilden oder nicht, bilden auch die anderen ein solches oder nicht. Die Bedingungen dafür, dass das System totaler Differentialgleichungen (21.) oder das adjungirte System partieller Differentialgleichungen (23.) ein vollständiges ist, sollen die ***Integrabilitätsbedingungen*** genannt werden.

§. 14.

Ableitung der Integrabilitätsbedingungen aus der *Jacobi-Clebsch*schen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Damit das System partieller Differentialgleichungen (23.) ein vollständiges sei, ist nach *Jacobi* und *Clebsch* (dieses Journal, Bd. 65, S. 258) die folgende Bedingung nothwendig und hinreichend.

Sind

$$A(f) = A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$B(f) = B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

irgend zwei der Differentialgleichungen (23.) (oder lineare Verbindungen derselben), so muss auch

$$A(B(f)) - B(A(f)) = (A(B_1) - B(A_1)) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + (A(B_n) - B(A_n)) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

dem Systeme angehören. Es müssen also alle Werthe

$$u_1 = a_1, \quad \ldots \quad u_n = a_n,$$

welche den Gleichungen (13.) genügen, auch die Gleichung

$$\sum_\alpha (A(B_\alpha) - B(A_\alpha)) a_\alpha = 0$$

befriedigen, welche ausgerechnet

$$\sum_{\alpha,\beta} \left(A_\beta \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} - B_\beta \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right) a_\alpha = 0$$

lautet. Nun ist aber

$$\Sigma A_\alpha a_\alpha = 0, \quad \Sigma B_\alpha a_\alpha = 0$$

und daher

$$\sum_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} a_\alpha = -\sum_\alpha A_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad \sum_\alpha \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} a_\alpha = -\sum_\alpha B_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

An Stelle der obigen Gleichung kann man also setzen

$$-\sum_{\alpha,\beta} A_\beta B_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha,\beta} B_\beta A_\alpha \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} = 0,$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$(6.) \qquad a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha}$$

setzt,

$$\Sigma a_{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = 0.$$

In dieser Gleichung braucht man für $A_1, \dots A_n$; $B_1, \dots B_n$ nur je zwei verschiedene Reihen der Grössen (12.) und für $a_1, \dots a_n$ nur der Reihe nach die Grössen (14.) zu nehmen. Dann ist sie auch (Vgl. *Clebsch*, dieses Journal Bd. 65, S. 258) erfüllt, wenn man

$$a_\alpha = \sum_\mu m_\mu a_\alpha^{(\mu)}, \quad A_\alpha = \sum_\varrho r_\varrho A_\alpha^{(\varrho)}, \quad B_\alpha = \sum_\sigma s_\sigma A_\alpha^{(\sigma)}$$

setzt. Denn ihre linke Seite geht, wenn man

$$(6^*.) \qquad a_{\alpha\beta}^{(\mu)} = \frac{\partial a_\alpha^{(\mu)}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta^{(\mu)}}{\partial x_\alpha}$$

setzt, in

$$\Sigma\Big(m_\mu a_{\alpha\beta}^{(\mu)} r_\varrho A_\alpha^{(\varrho)} s_\sigma A_\beta^{(\sigma)} + \Big(a_\alpha^{(\mu)} \frac{\partial m_\mu}{\partial x_\beta} - a_\beta^{(\mu)} \frac{\partial m_\mu}{\partial x_\alpha}\Big) r_\varrho A_\alpha^{(\varrho)} s_\sigma A_\beta^{(\sigma)}\Big)$$

über, wo sich die Summation auf alle Indices erstreckt. Dieser Ausdruck ist aber aus den Summen

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}^{(\mu)} A_\alpha^{(\varrho)} A_\beta^{(\sigma)}, \quad \sum_\alpha a_\alpha^{(\mu)} A_\alpha^{(\varrho)}, \quad \sum_\beta a_\beta^{(\mu)} A_\beta^{(\sigma)}$$

linear zusammengesetzt, von denen die erste nach der Annahme, die beiden anderen nach Gleichung (11.) verschwinden.

Damit das System totaler Differentialgleichungen (21.) ein vollständiges sei, ist also nothwendig und hinreichend, dass die m alternirenden bilinearen Formen (Covarianten)

$$W_\mu = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}^{(\mu)} u_\alpha v_\beta$$

verschwinden, wenn für die Variablen irgend zwei Lösungen der linearen

Gleichungen (10.) gesetzt werden. Bedeutet (22.) (wie stets im Folgenden) irgend eine der Gleichungen (21.) oder eine lineare Verbindung derselben, so verschwindet dann auch die Covariante

$$W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta,$$

wenn zwischen den Variablen die linearen Gleichungen (10.) nebst den congruenten bestehen.

§. 15.

Directe Ableitung der Integrabilitätsbedingungen nach *Deahna*.

Das im vorigen Paragraphen erhaltene Resultat hat *Deahna* (dieses Journal, Bd. 20, S. 340) direct ohne Zurückführung der totalen Differentialgleichungen auf partielle abgeleitet. Sein Beweis ist, in einer mehr symmetrischen und algebraischen Form dargestellt, der folgende.

Haben die totalen Differentialgleichungen (21.) m verschiedene Integrale $f_1 = \alpha_1, \dots f_m = \alpha_m$, so nehme man zu den m unabhängigen Functionen $f_1, \dots f_m$ noch $n-m$ andere Functionen $t_1, \dots t_{n-m}$ von $x_1, \dots x_n$ hinzu, welche zusammen mit jenen n unabhängige Functionen bilden. Dann sind auch $x_1, \dots x_n$ n unabhängige Functionen von $f_1, \dots f_m, t_1, \dots t_{n-m}$, und folglich ist die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial x_m}{\partial f_m} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-m}}$$

von Null verschieden. Daher können in den letzten $n-m$ Colonnen dieser Determinante, d. h. in dem Elementensystem $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\nu}$ nicht alle partialen Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Es gehe nun der Differentialausdruck (22.) in

$$g_1 df_1 + \cdots + g_m df_m + h_1 dt_1 + \cdots + h_{n-m} dt_{n-m}$$

über, wenn man $f_1, \dots f_m, t_1, \dots t_{n-m}$ an Stelle von $x_1, \dots x_n$ als unabhängige Variable einführt. Da (22.) verschwindet, wenn $df_1, \dots df_m$ Null sind, so muss

$$h_1 dt_1 + \cdots + h_{n-m} dt_{n-m} = 0$$

sein, ohne dass zwischen den Variablen $t_1, \dots t_{n-m}$ eine Relation besteht, es muss also

$$(\alpha.) \qquad h_\nu = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_\nu} + \cdots + a_n \frac{\partial x_n}{\partial t_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \dots n-m)$$

sein. Folglich muss auch (Vgl. §. 2)

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial}{\partial t_\sigma}\Big(\sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\varrho}\Big)-\frac{\partial}{\partial t_\varrho}\Big(\sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\sigma}\Big)=\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\varrho}\,\frac{\partial x_\beta}{\partial t_\sigma}=0$$

sein.

Die Gleichungen ($\alpha.$) und ($\beta.$) gelten unter der Voraussetzung, dass in den Functionen a_α und $a_{\alpha\beta}$ die Variablen $x_1, \dots x_n$ durch $t_1, \dots t_{n-m}$, $\alpha_1, \dots \alpha_m$ ausgedrückt sind. Wenn aber ihre linken Seiten als Functionen der n unabhängigen Variablen $t_1, \dots t_{n-m}$, $\alpha_1, \dots \alpha_m$ identisch verschwinden, so müssen sie es auch, wenn man an Stelle dieser Variablen Functionen von irgend welchen andern, z. B. $f_\mu(x_1 \dots x_n)$ für α_μ und für t_ν seinen Ausdruck in $x_1, \dots x_n$ einsetzt. Dann erhalten aber die Zeichen a_α und $a_{\alpha\beta}$ wieder ihre ursprüngliche Bedeutung, während $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\nu}$ in eine Function von $x_1, \dots x_n$ übergeht, die wir mit $x_\alpha^{(\nu)}$ bezeichnen wollen. Diese Functionen genügen identisch den Gleichungen

$$(\gamma.)\qquad a_1 x_1^{(\nu)}+\dots+a_n x_n^{(\nu)} = 0,$$

$$(\delta.)\qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, x_\alpha^{(\varrho)} x_\beta^{(\sigma)} = 0.$$

Da die erste derselben die m Gleichungen

$$a_1^{(\mu)} x_1^{(\nu)}+\dots+a_n^{(\mu)} x_n^{(\nu)} \qquad (\mu=1, \dots m)$$

repräsentirt, so sind

$$(\gamma.)\qquad x_1^{(\nu)}, \quad \dots \quad x_n^{(\nu)} \qquad (\nu=1, \dots n-m)$$

$n-m$ Lösungen der Gleichungen (10.). Die Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades der Grössen $x_\alpha^{(\nu)}$ sind Functionen von $x_1, \dots x_n$. Wären sie identisch Null, so würden sie es auch bleiben, wenn man für $x_1, \dots x_n$ ihre Ausdrücke in $t_1, \dots t_{n-m}$, $f_1, \dots f_m$ setzen würde. Die Determinanten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades der Ableitungen $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\nu}$, in welche die Grössen $x_\alpha^{(\nu)}$ durch diese Substitution übergehen, sind aber nicht alle Null. Daher sind die $n-m$ Lösungen ($\gamma.$) unabhängig, und jede andere Lösung der Gleichungen (10.) lässt sich aus ihnen linear zusammensetzen. Sind also $A_1, \dots A_n$; $B_1, \dots B_n$ irgend zwei Lösungen dieser Gleichungen, so ist

$$A_\alpha = \sum_\varrho r_\varrho x_\alpha^{(\varrho)}, \qquad B_\beta = \sum_\sigma s_\sigma x_\beta^{(\sigma)}$$

und daher

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = \sum_{\varrho,\sigma} r_\varrho s_\sigma \Big(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, x_\alpha^{(\varrho)} x_\beta^{(\sigma)}\Big) = 0.$$

Sollen also die Differentialgleichungen (21.) ein vollständiges System bilden, so muss die Covariante

$$W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

(welche m bilineare Formen $W_1, \dots W_m$ repräsentirt) verschwinden, wenn für die Variablen irgend zwei Lösungen der Gleichungen (10.) gesetzt werden.

Dass die als nothwendig erkannten Bedingungen auch hinreichend sind, beweist *Deahna* folgendermassen:

Wie oben gezeigt, bleiben diese Bedingungen erfüllt, wenn die gegebenen m Differentialgleichungen (21.) durch m unabhängige lineare Verbindungen derselben ersetzt werden. Sie bleiben aber auch, weil die Formen W nach §. 2 Covarianten sind, bestehen, wenn an Stelle von $x_1, \dots x_n$ neue Variable $x'_1, \dots x'_n$ eingeführt werden. Ich werde nun zeigen, dass es durch Anwendung dieser beiden Umformungen möglich ist, den gegebenen Differentialgleichungen m andere zu substituiren, welche eine Variable weniger enthalten.

Zunächst betrachte ich den speciellen Fall, in welchem das Differential einer bestimmten Variablen, etwa dx_n, in allen Gleichungen (21.) den Coefficienten Null hat. Unter den Determinanten m^{ten} Grades der Grössen $a_\alpha^{(\mu)}$, die nicht alle verschwinden, sei

$$M = \Sigma \pm a_1^{(1)} \dots a_m^{(m)}$$

von Null verschieden. Sind dann $a_1, \dots a_m$ beliebig gegebene Grössen, so kann man stets eine lineare Verbindung der Differentialausdrücke (21.) bilden, in welcher die Coefficienten von $dx_1, \dots dx_m$ die Werthe $a_1, \dots a_m$ haben, da zu dem Ende nur m lineare Gleichungen von nicht verschwindender Determinante M aufzulösen sind. Man kann folglich eine lineare Verbindung der gegebenen Differentialgleichungen

$$(22.) \qquad a_1 dx_1 + \dots + a_m dx_m + a_{m+1} dx_{m+1} + \dots + a_{n-1} dx_{n-1} = 0$$

bilden, in welcher $a_1, \dots a_m$ die Variable x_n nicht enthalten. Dann muss die bilineare Form

$$W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

für jedes Paar von Lösungen der Gleichungen (10.) verschwinden. In einer solchen Lösung ist aber der Werth von v_n ganz willkürlich, weil v_n in allen Gleichungen (10.) den Coefficienten Null hat. Daher muss in W

der Factor von v_n

$$(\delta.)\qquad \frac{\partial a_{m+1}}{\partial x_n} u_{m+1} + \cdots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} u_{n-1}$$

verschwinden, wenn $u_1, \ldots u_{n-1}$ den Gleichungen

$$a_1^{(\mu)} u_1 + \cdots + a_{n-1}^{(\mu)} u_{n-1} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

genügen. Bei der Auflösung dieser Gleichungen kann man aber, da M von Null verschieden ist, den Grössen $u_{m+1}, \ldots u_{n-1}$ völlig willkürliche Werthe ertheilen. Daher müssen in der linearen Form (δ.) die Coefficienten $\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_n} = 0$ sein. In dem Ausdruck (22.) kommt also die Variable x_n überhaupt nicht mehr vor.

Sind nun $b_\varrho^{(\sigma)}$ ($\varrho, \sigma = 1, \ldots m$) m^2 solche Functionen von $x_1, \ldots x_{n-1}$, dass die Determinante $|b_\varrho^{(\sigma)}|$ von Null verschieden ist (z. B. $b_\varrho^{(\sigma)}$ gleich 0 oder -1, je nachdem ϱ und σ verschieden oder gleich sind), so kann man m lineare Verbindungen der Differentialgleichungen (21.) bilden, in deren σ^{ter} der Coefficient von dx_ϱ gleich $b_\varrho^{(\sigma)}$ ist. Dieselben sind unter einander unabhängig, weil $|b_\varrho^{(\sigma)}|$ nicht verschwindet, und enthalten die Variable x_n nicht mehr, weil die Coefficienten der Differentiale $dx_1, \ldots dx_m$ von x_n frei sind.

Auf den somit erledigten speciellen Fall lässt sich der allgemeine durch Einführung neuer Variablen zurückführen. Dies ist klar für $m = n-1$. Denn führt man die $n-1$ Integrale an Stelle von $n-1$ Variablen ein, so kommt in den transformirten Differentialausdrücken das Differential der n^{ten} Variablen nicht mehr vor. Den Fall $m < n-1$ führt man auf den Fall $m = n-1$ zurück, indem man zu den gegebenen m Differentialgleichungen noch $n-m-1$ andere (z. B. $dx_{m+2} = 0, \ldots dx_n = 0$) hinzunimmt, mit anderen Worten:

Sei $A_1, \ldots A_n$ irgend eine Lösung der Gleichungen (10.), in der etwa A_n von Null verschieden sei. Dann haben die Differentialgleichungen

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = A_1 : A_2 : \ldots : A_n$$

$n-1$ Integralgleichungen, die $n-1$ willkürliche Constanten $x_1', \ldots x_{n-1}'$ enthalten, und die auf die Form

$$(\varepsilon.)\qquad x_\alpha = \varphi_\alpha(x_n, x_1', \ldots x_{n-1}') \qquad (\alpha = 1, \ldots n-1)$$

gebracht werden können. Da folglich

$$dx_1 : \ldots : dx_{n-1} : dx_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} : \ldots : \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} : 1$$

ist, so ist auch

$$A_1 : \dots : A_{n-1} : A_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} : \dots : \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} : 1,$$

und da $A_1, \dots A_n$ den Gleichungen (10.) genügen, und

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0$$

eine lineare Combination derselben ist, so ist

$$a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} + a_n = 0,$$

falls man in den Functionen $a_1, \dots a_n$ für die Variablen $x_1, \dots x_{n-1}$ die Ausdrücke $\varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$ einsetzt. Führt man nun an Stelle von $x_1, \dots x_{n-1}$ mittelst der Gleichungen (ε.) die Grössen $x'_1, \dots x'_{n-1}$ als neue Variable ein, so wird

$$a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = a'_1 dx'_1 + \dots + a'_{n-1} dx'_{n-1} + a'_n dx'_n,$$

wo

$$a'_n = a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + a_{n-1} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} + a_n = 0$$

ist. Die neuen Differentialgleichungen enthalten demnach dx_n nicht mehr, lassen sich also durch m unabhängige lineare Verbindungen ersetzen, in denen x_n überhaupt nicht mehr vorkommt.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens führt man die m gegebenen Differentialgleichungen (21.) zwischen n Variablen auf m Differentialgleichungen zwischen m unabhängigen Variablen $f_1, \dots f_m$ zurück,

$$(\zeta.) \quad h_1^{(\mu)} df_1 + \dots + h_m^{(\mu)} df_m = 0 \quad (\mu = 1, \dots m),$$

welche, wenn $f_1, \dots f_m$ durch $x_1, \dots x_n$ ausgedrückt werden, lineare Combinationen der Gleichungen (21.) sind. Da die m Ausdrücke (ζ.) unabhängig sind, so lassen sich auch umgekehrt $df_1, \dots df_m$ aus ihnen, also auch aus den Ausdrücken (21.) linear zusammensetzen. Es giebt also m unabhängige lineare Verbindungen der Ausdrücke (21.), welche vollständige Differentiale sind, und daher bilden die Differentialgleichungen (21.) ein vollständiges System.

§. 15.

Zweite Form der Integrabilitätsbedingungen.

Wir haben bereits in §. 9 die Bedingungen ermittelt, die nothwendig und hinreichend sind, damit die bilineare Form

$$W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

verschwindet, wenn für die Variablen irgend zwei Lösungen der linearen Gleichungen (10.) gesetzt werden. Dieselben lassen sich dahin zusammenfassen, dass in der Determinante

$$(24.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(m)} \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(m)} & \dots & -a_n^{(m)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Zu dieser zweiten Form der Integrabilitätsbedingungen (in der für die Coefficienten von W der Reihe nach die von $W_1, \dots W_m$ zu setzen sind) kann man direct auf folgendem Wege gelangen. Sind $df_1, \dots df_m$ m verschiedene Verbindungen der m Differentialausdrücke (21.), so sind auch umgekehrt letztere m unabhängige Combinationen von $df_1, \dots df_m$,

$$(\alpha.)\qquad a_1^{(\mu)}dx_1+\dots+a_n^{(\mu)}dx_n = g_1^{(\mu)}df_1+\dots+g_m^{(\mu)}df_m.$$

Sollte das gegebene System von Differentialgleichungen ausser den m unabhängigen Gleichungen (21.) noch andere

$$a_1^{(\lambda)}dx_1+\dots+a_n^{(\lambda)}dx_n = 0 \qquad (\lambda = m+1, \dots l)$$

enthalten, die lineare Verbindungen derselben sind, so sollen dieselben *überzählige* genannt werden. (Vgl. *Christoffel,* dieses Journal Bd. 68, p. 247.) Da sich ihre linken Seiten auch aus $df_1, \dots df_m$ linear zusammensetzen lassen, so bestehen auch für $\mu = m+1, \dots l$ Gleichungen von der Form (α.) aus denen folgt, dass

$$a_\alpha^{(\mu)} = g_1^{(\mu)}\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}+\dots+g_m^{(\mu)}\frac{\partial f_m}{\partial x_\alpha} \qquad (\mu = 1, \dots m,\ m+1, \dots l)$$

ist. Ist endlich (22.) irgend eine der Differentialgleichungen (21.) oder eine lineare Verbindung derselben, so ist auch a_α von der Form

$$a_\alpha = g_1\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}+\dots+g_m\frac{\partial f_m}{\partial x_\alpha},$$

und folglich ist

$$(\beta.)\qquad a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} = \sum_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\beta}-\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\alpha}.$$

Durch Zusammensetzung der beiden Elementensysteme

$$
\begin{matrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\
0 & \ldots & 0 & g_1^{(1)} & \ldots & g_m^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & g_1^{(l)} & \ldots & g_m^{(l)}
\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & -\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \ldots & -\frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\
g_1^{(1)} & \ldots & g_m^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
g_1^{(l)} & \ldots & g_m^{(l)} & 0 & \ldots & 0
\end{matrix}
$$

entsteht daher die Determinante

$$
(24^*.) \qquad
\begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_1^{(1)} & \ldots & a_1^{(l)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_n^{(1)} & \ldots & a_n^{(l)} \\
-a_1^{(1)} & \ldots & -a_n^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-a_1^{(l)} & \ldots & -a_n^{(l)} & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix}.
$$

Da jedes der beiden Elementensysteme nur $2m$ Colonnen enthält, so müssen in dieser Determinante alle partialen Determinanten $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

§. 16.

Dritte Form der Integrabilitätsbedingungen.

Unter den Determinanten m^{ten} Grades des Systems $a_\alpha^{(\mu)}$, die nicht alle verschwinden, sei, wie oben

$$M = \Sigma \pm a_1^{(1)} \ldots a_m^{(m)}$$

von Null verschieden. Dann ist die partiale Determinante $2m^{\text{ten}}$ Grades der Determinante (24.)

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_1^{(1)} & \ldots & a_1^{(m)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_m^{(1)} & \ldots & a_m^{(m)} \\
-a_1^{(1)} & \ldots & -a_m^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-a_1^{(m)} & \ldots & -a_m^{(m)} & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix} = M^2
$$

nicht Null. Damit also alle partialen Determinanten $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades derselben verschwinden, ist nach §. 5 nothwendig und hinreichend, dass die Hauptunterdeterminanten $(2m+2)^{\text{ten}}$ Grades Null sind, die man aus

$$(\alpha.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1\varrho} & a_{1\sigma} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m\varrho} & a_{m\sigma} & a_m^{(1)} & \dots & a_m^{(m)} \\ a_{\varrho 1} & \dots & a_{\varrho m} & a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho\sigma} & a_\varrho^{(1)} & \dots & a_\varrho^{(m)} \\ a_{\sigma 1} & \dots & a_{\sigma m} & a_{\sigma\varrho} & a_{\sigma\sigma} & a_\sigma^{(1)} & \dots & a_\sigma^{(m)} \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_m^{(1)} & -a_\varrho^{(1)} & -a_\sigma^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(m)} & \dots & -a_m^{(m)} & -a_\varrho^{(m)} & -a_\sigma^{(m)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

erhält, indem man für ϱ und σ alle verschiedenen Paare ungleicher Zahlen von $m+1$ bis n setzt. Daraus geht hervor, dass das System (21.) ein vollständiges ist, wenn die $\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$ Systeme

$$(\beta.)\qquad a_1^{(\mu)}dx_1+\dots+a_m^{(\mu)}dx_m+a_\varrho^{(\mu)}dx_\varrho+a_\sigma^{(\mu)}dx_\sigma=0 \qquad (\mu=1,\dots m),$$

wo $x_{m+1}, \dots x_n$ mit Ausschluss von x_ϱ, x_σ als Constante zu betrachten sind, vollständige sind. Nun sind aber die Determinanten (α.) Quadrate. Anstatt die Ausdrücke, deren Quadrate sie sind, zu berechnen, wollen wir diese dritte Form der Integrabilitätsbedingungen auf einem anderen Wege ableiten.

Wir betrachten zunächst den Fall $m=n-2$, auf welchen sich nach der eben gemachten Bemerkung der allgemeine Fall zurückführen lässt. $n-2$ unabhängige lineare Formen von n Variablen

$$a_1^{(\mu)}u_1+\dots+a_n^{(\mu)}u_n \qquad (\mu=1,\dots n-2)$$

haben eine bilineare zugehörige Form

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(n-2)} & \dots & a_n^{(n-2)} \\ U_1 & \dots & U_n \\ V_1 & \dots & V_n \end{vmatrix} = \Sigma A_{\alpha\beta}U_\alpha V_\beta\,^{*}),$$

*) Da diese Form das Zeichen wechselt, wenn man $U_1, \dots U_n$ mit $V_1, \dots V_n$ vertauscht, so ist sie eine alternirende, es ist also $A_{\alpha\alpha}=0$ und $A_{\alpha\beta}=-A_{\beta\alpha}$. Wählt man, was möglich ist, die $2n$ Grössen $a_\alpha^{(n-1)}$ und $a_\alpha^{(n)}$ $(\alpha=1,\dots n)$ so, dass die Determinante $N=\Sigma\pm a_1^{(1)}\dots a_n^{(n)}$ nicht verschwindet, so geht jene Form durch die Substitution $U_\alpha=a_\alpha^{(1)}U_1'+\dots+a_\alpha^{(n)}U_n'$ $(\alpha=1,\dots n)$ (und die congruente) in eine andere über $(N(U_{n-1}'V_n'-U_n'V_{n-1}'))$, welche nur zwei Variablenpaare enthält. Daher müssen (§. 12) die partialen Determinanten dritten und höheren Grades des Systems $A_{\alpha\beta}$ verschwinden. Die Quadratwurzeln aus den Hauptunterdeterminanten vierten Grades liefern die bekannte Relation

$$A_{\alpha\beta}A_{\gamma\delta}+A_{\alpha\gamma}A_{\delta\beta}+A_{\alpha\delta}A_{\beta\gamma}=0.$$

wo $U_1, \dots U_n;\ V_1, \dots V_n$ Variable sind, die den Veränderlichen $u_1, \dots u_n$ contragredient, d. h. durch die transponirte Substitution zu transformiren sind. Sind aber $\Sigma A_{\alpha\beta} U_\alpha V_\beta$ und $\Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$ eine Contravariante und eine Covariante eines Formensystems, so ist (Vgl. z. B. *Aronhold*, dieses Journal, Bd. 62, S. 339) $\Sigma A_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$ eine Invariante desselben. Sind nun

$$f_1 = \alpha_1, \ \dots \ f_{n-2} = \alpha_{n-2}$$

$n-2$ unabhängige Integrale der Differentialgleichungen (21.), so geht der Ausdruck (22.) durch die Substitution $f_1 = x'_1, \dots f_{n-2} = x'_{n-2}$ in $a'_1 dx'_1 + \dots + a'_{n-2} dx'_{n-2}$ über, wo $a'_{n-1} = a'_n = 0$ und daher auch $a'_{n-1,n} = \frac{\partial a'_{n-1}}{\partial x'_n} - \frac{\partial a'_n}{\partial x'_{n-1}} = 0$ ist. Folglich verschwindet für die $n-2$ Differentialausdrücke, in welche die Ausdrücke (21.) durch diese Substitution übergehen, die Invariante $\Sigma A'_{\alpha\beta} a'_{\alpha\beta}$, da die Determinanten $A'_{\alpha\beta}$ mit Ausnahme von $A'_{n-1,n}$ verschwinden, diese aber mit $a'_{n-1,n}$ multiplicirt ist. Wenn aber diese Invariante für das transformirte Formensystem verschwindet, so muss auch für das ursprüngliche System

$$(25^*.) \qquad \Sigma A_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = 0$$

sein *).

Ist $m < n-2$, so ist das System (21.) ein vollständiges, wenn die sämmtlichen Systeme (β.) es sind. Aus dieser Bemerkung ergeben sich (Vgl. *Deahna*, dieses Journal Bd. 20, S. 348) die Integrabilitätsbedingungen in folgender Form: Ist M von Null verschieden, und ist

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_m^{(1)} & a_\varrho^{(1)} & a_\sigma^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(m)} & \dots & a_m^{(m)} & a_\varrho^{(m)} & a_\sigma^{(m)} \\ U_1 & \dots & U_m & U_\varrho & U_\sigma \\ V_1 & \dots & V_m & V_\varrho & V_\sigma \end{vmatrix} = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}^{(\varrho\sigma)} U_\alpha V_\beta,$$

*) Ueber den genauen Sinn der oben gebrauchten Namen bemerke ich noch folgendes: Gehen die Differentialausdrücke (21.) und (22.) durch die Substitutionen (2.) und (3.) in $\sum_\alpha a_\alpha^{(\mu)\prime} dx'_\alpha$ und $\sum_\alpha a'_\alpha dx'_\alpha$ über, so sind die aus den Coefficienten der ursprünglichen und der transformirten Differentialausdrücke zu berechnenden Functionen $J = \Sigma A_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$ und $J' = \Sigma A'_{\alpha\beta} a'_{\alpha\beta}$ bis auf eine Potenz der Substitutionsdeterminante $|x_{\alpha\beta}|$ nicht identisch gleich, wie dies in der Algebra der Fall ist, sondern nur vermöge der Gleichungen (2.). Wenn daher $J' = 0$ ist, so kann man nur schliessen, dass J vermöge der Gleichungen (2.) (d. h. als Function von $x'_1, \dots x'_n$) gleich Null ist. Da aber diese Gleichungen die Veränderlichkeit von $x_1, \dots x_n$ nicht beschränken, so muss J auch als Function dieser Variablen identisch verschwinden.

so muss

$$(25.)\qquad \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}^{(\varrho\sigma)} a_{\alpha\beta}^{(\mu)} = 0 \quad (\mu = 1, \dots m)$$

sein, wo für ϱ, σ alle verschiedenen Paare ungleicher Zahlen von $m+1$ bis n zu setzen sind. Die linken Seiten der Gleichungen (25.) sind die Quadratwurzeln aus den alternirenden Determinanten (α.).

§. 17.

Neue Ableitung der Integrabilitätsbedingungen.

Die drei Formen, in denen wir die Integrabilitätsbedingungen aufgestellt haben, können auch in der folgenden, sehr einfachen Weise erhalten werden. Die Differentialgleichungen (21.) bilden ein vollständiges System, wenn sich m unter einander unabhängige lineare Verbindungen ihrer linken Seiten bilden lassen, welche vollständige Differentiale sind,

$$df_\lambda = \sum_\mu G_\mu^{(\lambda)} (a_1^{(\mu)} dx_1 + \dots + a_n^{(\mu)} dx_n) \quad (\lambda = 1, \dots m).$$

Setzt man den sich daraus ergebenden Werth $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\alpha} = \sum_\mu G_\mu^{(\lambda)} a_\alpha^{(\mu)}$ in die Gleichung (β.) §. 15 ein, so erhält man

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu} \left(G_\mu^{(\lambda)} a_\alpha^{(\mu)} \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\beta} - G_\mu^{(\lambda)} a_\beta^{(\mu)} \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder wenn man zur Abkürzung $\sum_\lambda G_\mu^{(\lambda)} \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\alpha} = b_\alpha^{(\mu)}$ setzt,

$$(26.)\qquad a_{\alpha\beta} = \sum_\mu (a_\alpha^{(\mu)} b_\beta^{(\mu)} - a_\beta^{(\mu)} b_\alpha^{(\mu)}).$$

Daraus folgt e r s t e n s, dass die bilineare Form

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = \sum_\mu [(\sum_\alpha a_\alpha^{(\mu)} u_\alpha)(\sum_\beta b_\beta^{(\mu)} v_\beta) - (\sum_\beta a_\beta^{(\mu)} v_\beta)(\sum_\alpha b_\alpha^{(\mu)} u_\alpha)]$$

verschwindet, wenn man für die Variablen irgend zwei Lösungen der Gleichungen (10.) setzt.

Ist z w e i t e n s $B_1, \dots B_n$ irgend eine Lösung dieser Gleichungen, ist also

$$(\alpha.)\qquad a_1^{(\mu)} B_1 + \dots + a_n^{(\mu)} B_n = 0, \quad (\mu = 1, \dots m),$$

so ergiebt sich aus (26.) $\sum_\beta a_{\alpha\beta} B_\beta = \sum_\mu a_\alpha^{(\mu)} (\sum_\beta b_\beta^{(\mu)} B_\beta)$, oder wenn man

$\sum_\beta b_\beta^{(\mu)} B_\beta = -B_{n+\mu}$ setzt,

$$(\beta.) \qquad \sum_\beta a_{\alpha\beta} B_\beta + \sum_\mu a_\alpha^{(\mu)} B_{n+\mu} = 0. \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

Aus den Gleichungen (β.) und (α.) lässt sich aber, wie in §. 9, schliessen, dass in der Determinante (24.) alle partialen Determinanten $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Der dritten Form der Integrabilitätsbedingungen wollen wir eine mehr symmetrische Gestalt geben. Seien $U_\alpha^{(\nu)}$ ($\alpha = 1, \dots n$; $\nu = 1, \dots n-m-2$) willkürliche Grössen und sei

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{(m)} & \dots & a_n^{(m)} \\ U_1^{(1)} & \dots & U_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_1^{(n-m-2)} & \dots & U_n^{(n-m-2)} \\ U_1 & \dots & U_n \\ V_1 & \dots & V_n \end{vmatrix} = \sum A_{\alpha\beta} U_\alpha V_\beta.$$

Da diese Determinante verschwindet, wenn man $U_1, \dots U_n$ gleich $a_1^{(\mu)}, \dots a_n^{(\mu)}$ setzt, so ist identisch $\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} a_\alpha^{(\mu)} V_\beta = 0$ und daher

$$\sum_\alpha A_{\alpha\beta} a_\alpha^{(\mu)} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \sum_\beta A_{\alpha\beta} a_\beta^{(\mu)} = 0.$$

Wenn man daher die Gleichung (26.) mit $A_{\alpha\beta}$ multiplicirt und nach α und β summirt, so erhält man

$$(25^*.) \qquad \sum A_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Function der willkürlichen Grössen $U_\alpha^{(\nu)}$. Da ihre Coefficienten einzeln verschwinden müssen, so fasst die Gleichung (25*.) die sämmtlichen Gleichungen (25.) in eine zusammen.

Nach §. 3 kann man stets zwei Lösungen der Gleichungen (10.) so bestimmen, dass

$$A_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$$

ist, eine Bemerkung, mittelst deren sich die dritte Form der Integrabilitätsbedingungen unmittelbar auf die erste zurückführen lässt.

§. 18.

Eigenschaften vollständiger Systeme.

Die Gleichungen

$$(\alpha.)\qquad f_1 = \alpha_1, \quad \dots \quad f_m = \alpha_m$$

sind m verschiedene Integrale des vollständigen Systems (21.), wenn $df_1, \dots df_m$ m unabhängige lineare Verbindungen der Differentialausdrücke (21.) oder die letzteren m unabhängige Verbindungen der ersteren sind. Folglich verhalten sich die Determinanten m^{ten} Grades der Coefficienten $a_\alpha^{(\mu)}$, wie die entsprechenden Determinanten m^{ten} Grades der Ableitungen $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\alpha}$, und eine solche Determinante des einen Systems, z. B. $\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}$, verschwindet oder nicht, je nachdem die entsprechende des andern $\Sigma \pm a_1^{(1)} \dots a_m^{(m)}$ Null ist oder nicht. Ist ferner $k < m$, so ist eine aus den Elementen von irgend k Colonnen des einen der beiden Elementensysteme $a_\alpha^{(\mu)}$ oder $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\alpha}$ gebildete partiale Determinante k^{ten} Grades eine homogene lineare Verbindung derjenigen partialen Determinanten k^{ten} Grades, welche sich aus den entsprechenden k Colonnen des andern Systems bilden lassen. Es müssen also alle Determinanten k^{ten} Grades, die sich aus k Colonnen des einen Systems, etwa

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_\mu}{\partial x_k} \qquad (\mu = 1, \dots m)$$

bilden lassen, verschwinden oder nicht, je nachdem alle Determinanten k^{ten} Grades, die sich aus den entsprechenden k Colonnen des andern Systems

$$(\gamma.)\qquad a_1^{(\mu)} \dots a_k^{(\mu)} \qquad (\mu = 1, \dots m)$$

bilden lassen, Null sind oder nicht.

Da die Functionen $f_1, \dots f_m$ der Variablen $x_1, \dots x_n$ unabhängig sind, so müssen sie auch, als Functionen gewisser m dieser Veränderlichen betrachtet, unabhängig sein. Nach solchen m Variablen lassen sich die Gleichungen (α.) auflösen. Es kann aber sein, dass es Gruppen von m Variablen giebt, in Bezug auf welche jene Functionen nicht unabhängig sind, es kann sogar der Fall eintreten, dass es Gruppen von k ($< m$) Variablen giebt, in Bezug auf welche keine k jener Functionen unabhängig sind, nach

welchen sich also die Gleichungen ($\alpha.$) nicht auflösen lassen. Eine solche Gruppe bilden $x_1, \dots x_k$ oder nicht, je nachdem in dem System ($\beta.$), und folglich auch in dem System ($\gamma.$), alle Determinanten k^{ten} Grades verschwinden oder nicht. m verschiedene Integrale ($\alpha.$) der Differentialgleichungen (21.) lassen sich also nach $k (\leqq m)$ Variablen auflösen oder nicht, je nachdem sich die Differentialgleichungen nach den Differentialen dieser k Variablen auflösen lassen oder nicht.

Betrachten wir jetzt $m+k$ unabhängige Differentialgleichungen

$$(\delta.) \qquad b_1^{(\lambda)} dx_1 + \dots + b_{n+k}^{(\lambda)} dx_{n+k} = 0 \quad (\lambda = 1, \dots m+k)$$

zwischen $n+k$ Variablen, die sich nach $dx_{n+1}, \dots dx_{n+k}$ auflösen lassen. Aus ihnen kann man durch Elimination dieser Differentiale genau m unabhängige Differentialgleichungen herleiten, welche $dx_{n+1}, \dots dx_{n+k}$ nicht enthalten. Wir wollen nun annehmen, dass sich aus ($\delta.$) m verschiedene Differentialgleichungen zusammensetzen lassen, welche nicht nur von jenen Differentialen, sondern auch von den Variablen $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ selbst frei sind. Die Gleichungen ($\delta.$) lassen sich dann durch $m+k$ Verbindungen von der Form

$$(\varepsilon.) \qquad a_1^{(\mu)} \; dx_1 + \dots + a_n^{(\mu)} \; dx_n = 0 \qquad (\mu = 1, \dots m),$$

$$(\zeta.) \qquad a_1^{(m+\varkappa)} dx_1 + \dots + a_n^{(m+\varkappa)} dx_n = dx_{n+\varkappa} \quad (\varkappa = 1, \dots k)$$

ersetzen, in denen die Coefficienten $a_\alpha^{(\mu)}$ die Variablen $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ nicht mehr enthalten. Ich behaupte nun, dass die m Differentialgleichungen ($\varepsilon.$) für sich ein vollständiges System bilden. Ist

$$a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = 0$$

irgend eine dieser Gleichungen oder eine von $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ freie lineare Verbindung derselben, so verschwindet ihre bilineare Covariante

$$W = \Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$$

für jedes Paar von Lösungen der $m+k$ linearen Gleichungen

$$(\eta.) \qquad a_1^{(\mu)} \; u_1 + \dots + a_n^{(\mu)} \; u_n = 0 \qquad (\mu = 1, \dots m),$$

$$(\vartheta.) \qquad a_1^{(m+\varkappa)} u_1 + \dots + a_n^{(m+\varkappa)} u_n = u_{n+\varkappa} \quad (\varkappa = 1, \dots k).$$

Nun kommen aber in W nur die ersten n Variablen jeder Reihe vor, und bei der Auflösung der $m+k$ Gleichungen kann man die Werthe der ersten n Unbekannten allein aus den m Gleichungen ($\eta.$) entnehmen, da sich aus

(ϑ.) stets passende zugehörige Werthe für $u_{n+1}, \dots u_{n+k}$ ergeben. Da also W für irgend zwei Lösungen der Gleichungen (η.) verschwindet, so bilden die m Differentialgleichungen (ε.) ein vollständiges System. Weil sie von $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ frei sind, brauchen auch ihre Integrale (α.) diese Variablen nicht zu enthalten.

Wenn sich aus einem vollständigen System von $m+k$ unabhängigen Differentialgleichungen m unabhängige Differentialgleichungen ableiten lassen, welche k Variable nicht enthalten, und wenn sich die gegebenen Differentialgleichungen nach den Differentialen dieser k Variablen auflösen lassen, so haben sie m verschiedene Integrale, welche diese k Variablen nicht enthalten.

Machen wir jetzt die weitere Annahme, dass die Coefficienten der Differentialgleichungen (ζ.) die Variablen $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ auch nicht enthalten, so lassen sich nach Integration der Differentialgleichungen (ε.) die Gleichungen (ζ.) einzeln durch Ausführung von Quadraturen integriren. Denn sei x irgend eine der Variablen $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ (oder eine lineare Verbindung derselben mit constanten Coefficienten) und sei

$$(\iota.) \quad a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n - dx = 0$$

irgend eine der Differentialgleichungen (ζ.) (oder eine Verbindung). Da (ε.) und (ζ.) zusammen ein vollständiges System bilden, so muss die bilineare Covariante von (ι.)

$$\Sigma a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta,$$

in welcher die Veränderlichen $u_{n+1}, \dots u_{n+k};\ v_{n+1}, \dots v_{n+k}$ nicht vorkommen, gleich Null sein, wenn für die Variablen irgend zwei Lösungen der Gleichungen (η.) und (ϑ.), oder, was dasselbe sagt, nur der Gleichungen (η.) gesetzt werden.

Sind $t_1, \dots t_{n-m}$ Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche zusammen mit $f_1, \dots f_m$ n unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n$ bilden, so sind auch $x_1, \dots x_n$ Functionen von $t_1, \dots t_{n-m}, f_1, \dots f_m$. Bezeichnet man mit $x_\alpha^{(\nu)}$ das, was aus $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\nu}$ wird, wenn man darin $x_1, \dots x_n$ als Variable einführt, so sind nach §. 14^a.*)

$$x_1^{(\nu)}, \quad \dots \quad x_n^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \dots n-m)$$

$n-m$ Lösungen der Gleichungen (η.). Daher ist

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha^{(\varrho)} x_\beta^{(\sigma)} = 0,$$

*) pag. 273; in der Ueberschrift des Paragraphen pag. 272 steht fälschlich §. 15 statt §. 14^a.

und folglich ist auch, wenn man $x_1, \dots x_n$ durch $t_1, \dots t_{n-m}, f_1, \dots f_m$ ausdrückt,

$$0 = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\varrho} \frac{\partial x_\beta}{\partial t_\sigma} = \frac{\partial}{\partial t_\sigma}\Big(\sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\varrho}\Big) - \frac{\partial}{\partial t_\varrho}\Big(\sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\sigma}\Big).$$

Mithin ist

$$\sum_\nu \Big(\sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial t_\nu}\Big) dt_\nu$$

das vollständige Differential einer Function $\psi(t_1, \dots t_{n-m}, f_1, \dots f_m) = \varphi(x_1, \dots x_n)$, falls bei der Differentiation $f_1, \dots f_m$ als Constante betrachtet werden, also gleich

$$\sum_\nu \frac{\partial \psi}{\partial t_\nu} dt_\nu = d\varphi - \sum_\mu \frac{\partial \psi}{\partial f_\mu} df_\mu,$$

und daher ist

$$a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n - dx = g_1 df_1 + \dots + g_m df_m + d(\varphi - x),$$

wo

$$g_\mu = \sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial f_\mu} - \frac{\partial \psi}{\partial f_\mu}$$

ist. Folglich ist $x - \varphi = \alpha$ ein Integral der Differentialgleichungen (δ.). Dasselbe wird nach Ermittlung der Integrale (α.) der Differentialgleichungen (ε.) durch eine Quadratur gefunden. (Vgl. *Natani*, dieses Journal, Bd. 58, S. 305.)

§. 19.

Beispiel eines vollständigen Systems.

Sind $a_1, \dots a_n$ irgend n Functionen von $x_1, \dots x_n$ und ist

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so bilden die Differentialgleichungen

$$(27.) \qquad a_{\alpha 1} dx_1 + \dots + a_{\alpha n} dx_n = 0 \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

ein vollständiges System.

Da dies für den Fall, dass die Determinante n^{ten} Grades $|a_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, sich von selbst versteht, so nehmen wir an, in derselben sei m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten. Dann enthält das System (27.) m unabhängige und $n-m$ überzählige Differentialgleichungen. Sind

$$A_1, \dots A_n; \; B_1, \dots B_n$$

irgend zwei Lösungen der linearen Gleichungen

$$(\alpha.) \qquad a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha n} u_n = 0 \quad (\alpha = 1, \dots n),$$

so ergiebt sich durch Differentiation von

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} B_\beta = 0$$

nach x_γ die Gleichung

$$\sum_\beta \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} B_\beta + a_{\alpha\beta} \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\gamma}\right) = 0.$$

Durch Multiplication mit A_α und Summation nach α erhält man daraus, weil

$$\sum_\alpha a_{\alpha\beta} A_\alpha = 0$$

ist, die Relation

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} A_\alpha B_\beta = 0,$$

welche mit Hülfe der Identität

$$\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = 0$$

auf die Form

$$\sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial x_\alpha}\right) A_\alpha B_\beta = 0$$

gebracht werden kann. Die bilinearen Covarianten der Differentialgleichungen (27.)

$$W_\gamma = \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial x_\alpha}\right) u_\alpha v_\beta \quad (\gamma = 1, \dots n)$$

verschwinden also, wenn für die Variablen irgend zwei Lösungen der Gleichungen (α.) gesetzt werden, und folglich ist das System (27.) ein vollständiges.

Ueber die Beziehungen, in denen die Integrale der Differentialgleichungen (27.) zu der Differentialgleichung (22.) stehen, werden wir später handeln (§. 27).

§. 20.

Ueber unvollständige Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Ich schliesse diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen über unvollständige Systeme totaler Differentialgleichungen. Nimmt man zu den Differentialgleichungen (21.), die den Integrabilitätsbedingungen nicht genügen mögen, noch $n-m-1$ Differentialgleichungen hinzu (am einfachsten ist es, die vollständigen Differentiale von $n-m-1$ willkürlichen Functionen gleich Null zu setzen), welche zusammen mit (21.) $n-1$ unabhängige Differentialgleichungen bilden, so ist das so erhaltene System ein vollständiges. Es kann aber sein, dass das System (21.) schon durch weniger als $n-m-1$ Gleichungen zu einem vollständigen ergänzt werden kann. Ist $r-m$ ($r \leqq n-1$) die kleinste Anzahl von Differentialgleichungen, welche dies leisten, so giebt es r Combinationen, $df_1, \dots df_r$ der m Differentialausdrücke (21.)

und der $r-m$ sie ergänzenden, welche vollständige Differentiale sind; folglich lassen sich auch umgekehrt die Differentialausdrücke (21.) aus $df_1, \dots df_r$ linear zusammensetzen

$$a_1^{(\mu)}dx_1+\dots+a_n^{(\mu)}dx_n = g_1^{(\mu)}df_1+\dots+g_r^{(\mu)}df_r,$$

und es ist klar, dass sie sich insgesammt nicht aus weniger vollständigen Differentialen zusammensetzen lassen. Die Aufgabe der Integration eines unvollständigen Systems besteht darin, die Integrale eines vollständigen Systems zu ermitteln, zu welchem jenes durch die möglich kleinste Anzahl von Gleichungen ergänzt ist *).

Die Differentialgleichungen (21.) verbunden mit $df_1=0, \dots df_r=0$ bilden ein vollständiges System, welches r unabhängige und m überzählige Gleichungen enthält. Ist daher (22.) irgend einer der Differentialausdrücke (21.) oder eine lineare Verbindung derselben, und ist

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so müssen nach (24*.) in der Determinante

$$\text{(28.)}\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(m)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n^{(1)} & \dots & a_n^{(m)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \\ -a_1^{(1)} & \dots & -a_n^{(1)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1^{(m)} & \dots & -a_n^{(m)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial f_r}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden **). Nimmt

*) Nach §. 13 heisst $f=\alpha$ ein Integral des (vollständigen oder unvollständigen) Systems (21.), wenn df eine lineare Combination der Differentialausdrücke (21.) ist. Die Integrale (in diesem Sinne) werden als simultane Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (23.) gefunden. In einem anderen Sinne von Integralen des unvollständigen Systems (21.) zu sprechen, also etwa jede der Gleichungen $f_1=\alpha_1, \dots f_r=\alpha_r$ *ein* Integral zu nennen, halte ich nicht für zweckmässig. Dagegen werde ich sagen, die Differentialgleichungen (21.) werden durch die endlichen Gleichungen $f_1=\alpha_1, \dots f_r=\alpha_r$ integrirt.

**) Die bilinearen Covarianten der Differentialausdrücke (21.) verschwinden in diesem Falle nur für je zwei von gewissen $n-r$ unabhängigen Lösungen der linearen Gleichungen (10.).

man also für (22.) die allgemeinste Combination der Differentialausdrücke (21.), und ist dann in der Determinante (24.), die eine partiale Determinante von (28.) ist, $2s$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, so kann r nicht kleiner als s sein. Für den Fall $m=1$ wird im folgenden Abschnitte bewiesen werden, dass r wirklich gleich s ist.

Wenn es umgekehrt möglich ist, r unabhängige Functionen $f_1, \dots f_r$ so zu bestimmen, dass in der Determinante (28.) alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, so sind auch die Hauptunterdeterminanten $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades Null, z. B. ist, wenn $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ irgend $r+1$ der Zahlen von 1 bis n bedeuten,

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & \dots & a_{\alpha\varepsilon} & a_\alpha^{(\mu)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varepsilon\alpha} & \dots & a_{\varepsilon\varepsilon} & a_\varepsilon^{(\mu)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_\varepsilon} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_\varepsilon} \\ -a_\alpha^{(\mu)} & \dots & -a_\varepsilon^{(\mu)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} & \dots & -\frac{\partial f_1}{\partial x_\varepsilon} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial f_r}{\partial x_\alpha} & \dots & -\frac{\partial f_r}{\partial x_\varepsilon} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha^{(\mu)} & \dots & a_\varepsilon^{(\mu)} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_\alpha} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_\varepsilon} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Es verschwinden also in dem Elementensysteme

$$\begin{matrix} a_1^{(\mu)} & \dots & a_n^{(\mu)} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{matrix}$$

alle Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades, und daher sind die $r+1$ Ausdrücke

$$\sum_\alpha a_\alpha^{(\mu)} dx_\alpha, \quad \sum_\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} dx_\alpha, \quad \dots \quad \sum_\alpha \frac{\partial f_r}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$$

nicht unabhängig. Da aber die r letzten es sind, so lässt sich der erste aus ihnen linear zusammensetzen *)

$$a_1^{(\mu)} dx_1 + \dots + a_n^{(\mu)} dx_n = g_1^{(\mu)} df_1 + \dots + g_r^{(\mu)} df_r.$$

*) Aus der Annahme, die unabhängigen Functionen $f_1, \dots f_r$ lassen sich so bestimmen, dass in der Determinante (28.) alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, würde sich diese Folgerung auch dann ziehen lassen, wenn das Zeichen $a_{\alpha\beta}$ nicht die oben vorausgesetzte Bedeutung hätte, sondern eine ganz willkürliche Grösse bezeichnete. Vgl. §. 23, Anm. II.

Ueber die Transformation linearer Differentialausdrücke erster Ordnung.

§. 21.

Die Invariante p.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns jetzt zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung, der Lösung des in §. 1 aufgestellten Problems. Dabei werde ich mich so wenig wie möglich auf die Entwickelungen in den §§. 6—11 stützen, und sie mehr als Parallele denn als Grundlage benutzen.

In §. 2 ist gezeigt, dass zwei Differentialausdrücke (4.) nur dann aequivalent sein können, wenn die Formen (7.) und (8.) aequivalent sind. Dazu ist aber nach §. 7 erforderlich, dass in der Determinante (15.) der bilinearen Covariante W des Differentialausdrucks (1.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten m derselbe sei, wie in der Determinante der bilinearen Covariante W' des transformirten Differentialausdrucks (1*.) *).

Wenn der Differentialausdruck (1.) durch die Substitution (2.) in (1.*) übergeht, so verwandelt sich der Differentialausdruck $x_0 \Sigma a_\alpha dx_\alpha$ durch die nämliche Substitution, verbunden mit $x_0 = x'_0$, in $x'_0 \Sigma a'_\alpha dx'_\alpha$. Daher muss auch für die Determinante der bilinearen Covariante dieses Differentialausdrucks

$$\begin{vmatrix} x_0 a_{11} & \dots & x_0 a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_0 a_{n1} & \dots & x_0 a_{nn} & a_n \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 \end{vmatrix}$$

der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten invariant sein, welches auch der Werth von x_0 sei. Da aber, wie leicht zu sehen, in jeder partialen Determinante eine Potenz von x_0 als Factor heraustritt, so genügt es, die unbestimmte Grösse $x_0 = 1$ zu setzen.

) Zunächst kann man zwar nur schliessen: Unter der Voraussetzung, dass die Variablen $x'_1, \dots x'_n$ mittelst der Gleichungen (2.) durch $x_1, \dots x_n$ ausgedrückt werden, verschwinden in der Determinante $\Sigma \pm a'_{11}, \dots a'_{nn}$ alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades. Eine Function von n unabhängigen Veränderlichen aber, welche verschwindet, wenn für dieselben n neue unabhängige Veränderliche eingeführt werden, muss identisch Null sein.

Die beiden gefundenen Invarianten, die höchsten Grade der in (15.) und (16.) nicht verschwindenden Unterdeterminanten, lassen sich, wie in §. 7, durch eine, ihr arithmetisches Mittel p, ersetzen. Auch hier wird es sich zeigen, dass die Uebereinstimmung der Invariante p nicht nur eine nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Aequivalenz zweier Differentialausdrücke ist. Nennt man also die Gesammtheit der Differentialausdrücke, in die sich ein bestimmter transformiren lässt, eine *Klasse* von Differentialausdrücken, so können wir alle Ausdrücke von der Invariante p zur p^{ten} Klasse rechnen.

Auch hier wird sich die Nothwendigkeit herausstellen, die Differentialausdrücke von gerader und von ungerader Klasse getrennt zu behandeln. Die Kriterien, mittelst deren man diese beiden Fälle von einander unterscheiden kann, sind in §. 7 ausführlich entwickelt *). Um aber Wiederholungen zu vermeiden, werde ich zunächst die Differentialausdrücke gerader und ungerader Klasse zusammen betrachten, wenngleich die folgenden Untersuchungen nur für den Fall einer geraden Invariante zum Ziele führen.

§. 22.

Die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen.

Ich setze voraus, dass in der alternirenden Determinante (16.) $m=2r$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist. In der Determinante (15.) kann dann nach §. 7 dieser Grad nur einen der beiden Werthe $2r$ oder $2r-2$ haben. Im ersten Fall ist die Invariante p gerade $(2r)$, im anderen ungerade $(2r-1)$.

Wenn die Substitution (2.) gegeben ist, so kann man zu jeder Function $f(x_1, \dots x_n)$ die transformirte Function $f'(x'_1, \dots x'_n)$ berechnen. Umgekehrt kann man aber auch, falls man eine hinreichende Anzahl von Functionen f aufzufinden vermag, zu denen man ohne Kenntniss der Substitution (2.) die transformirten Functionen f' anzugeben im Stande ist, die Gleichungen $f=f'$ zur Ermittlung der Substitution (2.) benutzen. Zu solchen Functionen gelangt man durch folgende Ueberlegung.

Sind $z_1, \dots z_k$ Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche durch die Substitution (2.) in $z'_1, \dots z'_k$ übergehen, so verwandelt sich der Differentialausdruck

*) Es sind also diese Kriterien an die Stelle der von *Clebsch* (Bd. 60, S. 218) angegebenen zu setzen, welche nach §. 4, Satz IV nicht richtig sein können.

$$x_0 \Sigma a_\alpha dx_\alpha + x_{n+1} dz_1 + \cdots + x_{n+k} dz_k = \Sigma b_\gamma dx_\gamma$$

durch jene Substitution, verbunden mit

$$x_0 = x_0', \quad x_{n+\varkappa} = x_{n+\varkappa}' \quad (\varkappa = 1, \dots k)$$

in

$$x_0' \Sigma a_\alpha' dx_\alpha' + x_{n+1}' dz_1' + \cdots + x_{n+k}' dz_k'.$$

Setzt man also

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial b_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so muss in der Determinante

$$(\alpha.) \quad \Sigma \pm b_{00} b_{11} \dots b_{nn} b_{n+1,n+1} \dots b_{n+k,n+k}$$

der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten invariant sein.

Nun ist aber, wenn α, β Zahlen von 1 bis n, und $\varkappa, \lambda$ Zahlen von 1 bis k bedeuten,

$$b_0 = 0, \; b_\alpha = x_0 a_\alpha + x_{n+1} \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + x_{n+k} \frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha}, \; b_{n+\varkappa} = 0,$$

und daher

$$(\beta.) \quad b_{\alpha\beta} = x_0 a_{\alpha\beta}, \; b_{\alpha 0} = a_\alpha, \; b_{\alpha, n+\lambda} = \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\alpha}, \; b_{n+\varkappa, 0} = b_{n+\varkappa, n+\lambda} = 0.$$

Da folglich in jeder partialen Determinante von $(\alpha.)$ eine Potenz von x_0 als Factor heraustritt, so genügt es, $x_0 = 1$ zu setzen.

Es muss also in der Determinante

$$(\gamma.) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_1 & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_n & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \\ -a_1 & \cdots & -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten derselbe sein, wie in der aus dem transformirten System analog gebildeten Determinante. Sind $z_1, \dots z_k$ ganz beliebige Functionen, so wird jener Grad im Allgemeinen eine gewisse Zahl l sein. Für specielle Functionen kann er aber auch kleiner als l sein, und dann ist er für die transformirten Functionen

ebenfalls kleiner als l. Genügen also die Functionen $z_1, \dots z_k$ den partiellen Differentialgleichungen, welche ausdrücken, dass jener Grad kleiner als l ist, so genügen $z'_1, \dots z'_k$ partiellen Differentialgleichungen, deren Coefficienten aus den Grössen a'_α und ihren Ableitungen ebenso zusammengesetzt sind, wie die Coefficienten jener Differentialgleichungen aus den Grössen a_α und ihren Ableitungen. Die Anzahl dieser Gleichungen ist um so grösser, je kleiner in (γ.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist. Da er nicht kleiner als m sein kann, so wollen wir möglichst viele unabhängige Functionen $z_1, \dots z_k$ so zu bestimmen suchen, dass jener Grad gleich m ist. Auf die nämliche Weise, wie in §. 8 ergiebt sich, dass die Anzahl solcher Functionen nicht grösser als r sein kann. Ich werde aber zeigen, dass sich stets r unabhängige Functionen den gestellten Bedingungen gemäss bestimmen lassen.

Wir wollen annehmen, es seien bereits k unabhängige Functionen $z_1, \dots z_k$ (wo $k < r$ ist und auch Null sein kann) so bestimmt, dass in der Determinante (γ.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Damit dann auch in der Determinante

$$(\delta.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_n} \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist nach der Bemerkung am Ende des §. 5 nothwendig und hinreichend, dass $f = z_{k+1}$ den partiellen Differentialgleichungen genügt, welche man aus

$$(29.)\qquad A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

erhält, indem man für $A_1, \dots A_n$ alle Werthe setzt, die sich für die Unbekannten $u_1, \dots u_n$ aus den Gleichungen

die Determinanten $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Die Ausdrücke

$$\Sigma a_\alpha dx_\alpha, \quad \Sigma \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} dx_\alpha, \quad \dots \quad \Sigma \frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha}$$

würden also nicht unabhängig sein, und da die letzten k es sind, so würden sich die Multiplicatoren $Z_1, \dots Z_k$ so bestimmen lassen, dass

$$(\eta.) \qquad \Sigma a dx = Z_1 dz_1 + \dots + Z_k dz_k$$

wäre. Dies erfordert aber, wie in §. 24 nachgewiesen werden wird, dass in der Determinante (16.) alle partialen Determinanten $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist also unmöglich, so lange $k < r$ ist.

Da in der Determinante (16.) m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, so befinden sich bereits unter den ersten $n+1$ der Differentialgleichungen (30.) m unabhängige, aus denen alle andern linear zusammengesetzt sind. Aus diesen lassen sich $m-k-1$ unabhängige Differentialgleichungen herleiten, welche die $k+1$ Variablen $x_0, x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ nicht enthalten. Denn die $k+1$ Gleichungen

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$
$$\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_n} v_n = 0 \quad (\varkappa = 1, \dots k)$$

sind, wie eben gezeigt, unter einander unabhängig, haben daher $n-k-1$ verschiedene Lösungen

$$B_1^{(\varrho)} \quad \dots \quad B_n^{(\varrho)} \quad (\varrho = 1, \dots n-k-1),$$

welche die Grössen $x_0, x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ nicht enthalten brauchen und sollen. Da die Determinanten $(n-k-1)^{\text{ten}}$ Grades der Grösseu $B_\alpha^{(\varrho)}$ nicht alle verschwinden, so kann man die Grössen

$$B_1^{(\sigma)} \quad \dots \quad B_n^{(\sigma)} \quad (\sigma = n-k, \dots n)$$

so wählen, dass die Determinante n^{ten} Grades $|B_\alpha^{(\beta)}|$ von Null verschieden ist. Multiplicirt man nun die n ersten Gleichungen (30.) der Reihe nach mit

$$B_1^{(\beta)} \quad \dots \quad B_n^{(\beta)}, \quad (\beta = 1, \dots n-k-1, n-k, \dots n),$$

so erhält man n Gleichungen von der Form

$$(\vartheta.) \qquad c_{\varrho 1} dx_1 + \dots + c_{\varrho n} dx_n = 0 \quad (\varrho = 1, \dots n-k-1),$$

$$(\iota.) \qquad \begin{cases} c_{\sigma 1} dx_1 + \dots + c_{\sigma n} dx_n + c_\sigma dx_\sigma + c_{\sigma, n+1} dx_{n+1} + \dots + c_{\sigma, n+k} dx_{n+k} = 0 \\ \qquad\qquad (\sigma = n-k, \dots n), \end{cases}$$

welche verbunden mit

$$(\varkappa.) \qquad a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = 0$$

die ersten $n+1$ Gleichungen (30.) vollständig ersetzen, da sich auch umgekehrt diese aus jenen linear zusammensetzen lassen. Unter den Gleichungen (ϑ.), (ι.) und ($\varkappa$.) sind daher ebenso viele unabhängig, wie unter den ersten $n+1$ Gleichungen (30.), also m. Lässt man nun die $k+1$ Gleichungen (ι.) weg, so sind unter den übrigen Gleichungen (ϑ.) und ($\varkappa$.), die von $x_0, x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ frei sind, noch mindestens $m-k-1$ unabhängig.

Wenn sich aber aus einem vollständigen Systeme von m unabhängigen Differentialgleichungen $m-(k+1)$ unabhängige Differentialgleichungen ableiten lassen, welche $k+1$ Variable nicht enthalten, und wenn sich die gegebenen Differentialgleichungen nach den Differentialen dieser $k+1$ Variablen auflösen lassen, so haben sie $m-k-1$ verschiedene Integrale, welche diese $k+1$ Variablen nicht enthalten (§. 18). Ist nun $f=a$ irgend ein Integral der totalen Differentialgleichungen (30.), so ist f eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen, die man aus

$$\frac{A_1}{x_0}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\dots+\frac{A_n}{x_0}\frac{\partial f}{\partial x_n}+A\frac{\partial f}{\partial x_0}+A_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}+\dots+A_{n+k}\frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} = 0$$

erhält, indem man für

$$A_1, \quad \dots \quad A_n, \quad A, \quad A_{n+1}, \quad \dots \quad A_{n+k}$$

der Reihe nach alle verschiedenen Lösungen der Gleichungen

$$x_0 a_{\alpha 1}\frac{u_1}{x_0}+\dots+x_0 a_{\alpha n}\frac{u_n}{x_0}+a_\alpha u+\frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}u_{n+1}+\dots+\frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha}u_{n+k} = 0 \quad (\alpha=1,\dots n),$$

$$a_1\frac{u_1}{x_0}+\dots+a_n\frac{u_n}{x_0} = 0,$$

$$\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_1}\frac{u_1}{x_0}+\dots+\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_n}\frac{u_n}{x_0} = 0 \quad (\varkappa=1,\dots k),$$

d. h. der Gleichungen (ε.), setzt (§. 13). Ist f von $x_0, x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ unabhängig, ist also

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}} = 0,$$

so genügt f den partiellen Differentialgleichungen (29.). Dieselben haben folglich $m-k-1$ verschiedene Lösungen *).

*) Für den Fall, dass $m=n+1$ ist, also dass n ungerade und die Determinante (16.) von Null verschieden ist, verschwindet für $k=0$ die Determinante (δ.) identisch, und daher bleibt z_1 ganz willkürlich. Dies ist aber auch der *einzige* Fall, in welchem eine der Functionen z_ϱ völlig unbestimmt bleibt. Dass dieser Fall insofern als ein singulärer zu betrachten ist, hat schon *Clebsch* (dieses Journal Bd. 60, S. 228) bemerkt.



Die Gleichungen (ε.), unter denen m unabhängig sind, haben $n+1+k-m$ verschiedene Lösungen. In denselben sind auch die Werthe von $u_1, \dots u_n$ unabhängig, da sonst (§. 3.) in dem Elementensystem (ζ.) die Determinanten $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden würden. Die Anzahl der Differentialgleichungen (29.) beträgt daher $n+1+k-m$. Da sie $n-(n+1+k-m) = m-k-1$ Lösungen haben, so bilden sie ein vollständiges System. Sie werden, wie schon oben bemerkt, durch die Functionen $z_1, \dots z_k$ befriedigt. Sie haben daher $m-2k-1$ von diesen und von einander unabhängige Lösungen, also mindestens eine, so lange $k < r$ ist.

Bei diesem Beweise wurde über die Functionen $z_1, \dots z_k$ weiter nichts vorausgesetzt, als dass sie unabhängig sind, und dass in der Determinante (γ.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Daher kann man für z_{k+1} eine ganz beliebige jener $m-2k-1$ Lösungen nehmen. Dann sind $z_1, \dots z_{k+1}$ unabhängig, und in der Determinante (δ.) verschwinden alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades. Folglich bilden, falls $k+1 < r$ ist, die den Differentialgleichungen (29.) analogen partiellen Differentialgleichungen, denen z_{k+2} genügen muss, wieder ein vollständiges System und haben eine von $z_1, \dots z_{k+1}$ unabhängige Lösung.

§. 23.

Die reducirte Form der Differentialausdrücke erster Ordnung.

Damit ist der Beweis geführt, dass sich r unabhängige Functionen $z_1, \dots z_r$ so bestimmen lassen, dass in der Determinante

$$(31.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden (S. unten Anm. I). Daher sind auch die Hauptunterdeterminanten $(m+2)^{\text{ten}}$ Grades Null: z. B. ist, wenn $\alpha, \beta \dots \varepsilon$ irgend $r+1$ verschiedene Zahlen von 1 bis n sind:

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & \dots & a_{\alpha\varepsilon} & a_\alpha & \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varepsilon\alpha} & \dots & a_{\varepsilon\varepsilon} & a_\varepsilon & \frac{\partial z_1}{\partial x_\varepsilon} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_\varepsilon} \\ -a_\alpha & \dots & -a_\varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_\varepsilon} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_\varepsilon} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & \dots & a_\varepsilon \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_\varepsilon} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Es verschwinden also alle Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems (S. unten Anm. II)

$$(\alpha.)\quad \left\{\begin{matrix} a_1 & \dots & a_n \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} \end{matrix}\right.$$

und folglich sind die $r+1$ Ausdrücke

$$a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = \Sigma a\,dx$$

$$\frac{\partial z_\varrho}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_n} dx_n = dz_\varrho \quad (\varrho = 1, \dots r)$$

nicht unabhängig. Da aber die r letzten es sind, so lassen sich (und zwar nur durch Auflösung linearer Gleichungen) die Multiplicatoren $z_{r+1}, \dots z_{2r}$ so bestimmen, dass

$$(32.)\quad \Sigma a\,dx = z_{r+1} dz_1 + \dots + z_{2r} dz_r$$

ist. Die Functionen $z_1, \dots z_r$, mit deren Hülfe wir die Substitution (2.) abzuleiten gedachten, haben uns also zunächst zu einer eigenthümlichen Umgestaltung des Differentialausdrucks (1.) geführt. Ehe wir daraus weitere Folgerungen ziehen, wollen wir das gefundene Resultat umkehren.

Anm. I. Wenn es sich um die Integration der Differentialgleichung $\Sigma a\,dx = 0$ handelt, so scheinen mir die beiden folgenden Wege, der eine analytischer, der andere algebraischer Natur, die einfachsten zu sein.

Nach §. 20 besteht die Integration dieser Differentialgleichung darin, dass sie durch die möglich kleinste Anzahl von Gleichungen zu einem vollständigen System ergänzt, und dieses integrirt wird. Sind $z_1 = \gamma_1, \dots z_r = \gamma_r$ die Integrale eines solchen vollständigen Systems, so sind $z_1, \dots z_r$ so zu

bestimmen, dass in der Determinante (28.), welche für den Fall *einer* Differentialgleichung in (31.) übergeht, alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Dass dies möglich ist, falls $2r$ den höchsten Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten in (16.) bedeutet, ist in §. 22 nachgewiesen.

Oder noch einfacher: Die gegebene Differentialgleichung integriren heisst, die kleinste Anzahl vollständiger Differentiale $dz_1, \dots dz_r$ angeben, welche verschwinden müssen, damit $\Sigma a\,dx = 0$ ist. Bedeuten d und δ Differentiale nach zwei Richtungen, so sind also

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_n} dx_n &= 0 \\ \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_n} \delta x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (\varrho = 1, \dots r)$$

die kleinste Anzahl congruenter linearer Relationen, (deren linke Seiten vollständige Differentiale sind) die zwischen den Differentialen der unabhängigen Veränderlichen bestehen müssen, damit

$$\Sigma a\,dx = 0, \quad \Sigma a\,\delta x = 0$$

und daher auch

$$\delta \Sigma(a\,dx) - d(\Sigma a\,\delta x) = \Sigma a_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, \delta x_\beta = 0$$

ist. Die allgemeinste *algebraische* Lösung dieser Aufgabe (bei der von der Bedingung abgesehen ist, dass die linken Seiten jener Relationen vollständige Differentiale sein sollen) ist in §. 9 entwickelt. Sie kommt auf die Auflösung einer Anzahl linearer Gleichungen (§. 8, (ϑ.)) zurück. Es ist nun merkwürdig, dass sie zugleich die analytische Lösung des *Pfaff*schen Problems in sich schliesst, d. h. dass die partiellen Differentialgleichungen (29.), welche an die Stelle jener algebraischen Gleichungen treten, sämmtlich vollständige Systeme bilden, wie in §. 22 gezeigt ist. Unterlässt man diesen Nachweis, so löst man also nicht das *Pfaff*sche Problem, sondern eine damit verwandte algebraische Aufgabe.

Anm. II. *Clebsch* beweist (dieses Journal Bd. 61, S. 151.) diesen Satz für den Fall $m = n$ durch Multiplication dreier Determinanten und legt grosses Gewicht auf seinen Beweis. Wie man aber sieht, ist jene Multiplication ganz unnöthig.

Uebrigens lässt sich auch die Bemerkung, welche *Clebsch* (dieses

Journal Bd. 61, S. 165) für $m = n$ macht, auf beliebige Werthe von m ausdehnen. Seien $c_{\alpha\beta}$ irgend n^2 Grössen, die der Bedingung genügen, dass in der Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & a_n \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, und sei M eine von Null verschiedene partiale Determinante m^{ten} Grades. Es möge ferner möglich sein, $r\left(\geqq \frac{m-1}{2}\right)$ unabhängige Functionen $z_1, \dots z_r$ so zu bestimmen, dass in der Determinante C, die man aus (31.) durch Ersetzung von $a_{\alpha\beta}$ durch $c_{\alpha\beta}$ erhält, alle diejenigen partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, deren Elemente man erhält, indem man zu denen von M die irgend einer Zeile und Colonne von C hinzusetzt. Nach dem in §. 4 citirten Satze des Herrn *Kronecker* verschwinden dann alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades, also auch die $(2r+2)^{\text{ten}}$ Grades. Daraus folgt dann, wie oben, dass in dem System (α.) alle Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Die hier mit $c_{\alpha\beta}$ bezeichneten Grössen sind für den Fall $m = n$ nicht mit denen identisch, die *Clebsch* l. c. mit $b_{\alpha\beta}$ bezeichnet, sondern sind die Elemente des adjungirten Systems. (*Baltzer*, Det. §. 6.)

§. 24.

Allgemeinste Transformation eines Differentialausdrucks in die reducirte Form.

Seien $z_1, \dots z_m$ irgend $m = 2r$ Functionen von $x_1, \dots x_n$, die nicht unabhängig zu sein brauchen, und sei

$$\sum_{\varrho}{}_1^r z_{r+\varrho}\, dz_\varrho = \sum_{\alpha}{}_1^n a_\alpha\, dx_\alpha,$$

also

$$a_\alpha = \sum_\varrho z_{r+\varrho} \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_\alpha}$$

und daher

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x_\alpha} = \sum_\varrho \left(\frac{\partial z_\varrho}{\partial x_\alpha} \frac{\partial z_{r+\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial z_{r+\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_\beta} \right).$$

Durch Zusammensetzung der beiden Elementensysteme

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} \\
0 & \dots & 0 & z_{r+1} & \dots & z_{2r} \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
-1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} & -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_n} \\
z_{r+1} & \dots & z_{2r} & 0 & \dots & 0 \\
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}$$

erhält man daher die Determinante

$$(33.)\quad \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} \\
-a_1 & \dots & -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} & \dots & z_{2r} \\
-\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
-\frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} & -z_{r+1} & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} & -z_{2r} & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}.$$

Da von jenen beiden Elementensystemen jedes nur m Colonnen enthält, so müssen in dieser Determinante alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Daraus ergeben sich die partiellen Differentialgleichungen für $z_{r+1}, \dots z_{2r}$, welche für den Fall $m=n$ von *Clebsch*, dieses Journal Bd. 61, S. 150, angegeben sind. Ferner zeigt sich, dass, wenn in der Determinante (16.), einer Unterdeterminante von (33.), nicht alle partialen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, der Ausdruck (1.) nicht auf die Gestalt (32.) gebracht werden kann, ein Resultat, von dem bereits in §. 22 (Formel η.) Gebrauch gemacht wurde. Endlich folgt, dass, wie auch der Differentialausdruck (1.) auf die Gestalt (32.) gebracht sei, immer $z_1, \dots z_r$

so bestimmt werden müssen, dass in der Determinante (31.), einer Unterdeterminante von (33.), alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Durch das in §. 22 gelehrte Verfahren werden also *alle* Functionen $z_1, \dots z_r$ gefunden, mittelst deren der Differentialausdruck (1.) auf die Gestalt (32.) reducirt werden kann.

§. 25.

Die Aequivalenz der Differentialausdrücke von gerader Invariante $p = 2r$.

Wir haben den bisherigen Untersuchungen die Annahme zu Grunde gelegt, dass in der Determinante (16.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten $m = 2r$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist die Invariante p des Differentialausdrucks (1.) entweder $2r$ oder $2r-1$. Diese beiden Fälle wollen wir jetzt genauer discutiren.

Ist $p = m = 2r$, so sind in der Determinante (15.) die partialen Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades nicht alle Null. Da dieselbe durch Zusammensetzung der beiden Systeme

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} \cdots \frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha} \quad \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_\alpha} \quad \cdots \quad \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

und

$$\frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_\beta} \cdots \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial z_1}{\partial x_\beta} \quad \cdots - \frac{\partial z_r}{\partial x_\beta} \quad (\beta = 1, \dots n)$$

entsteht (Vgl. *Clebsch,* Bd. 60, S. 203), so können in keinem derselben alle Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und folglich sind die $2r$ Functionen $z_1, \dots z_m$ unabhängig.

Hat nun der Differentialausdruck (1*.) ebenfalls die Invariante $p = 2r$, so muss er sich in derselben Weise, in der sich (1.) auf die Form

$$(32.) \qquad \Sigma a\, dx = \sum_{\varrho}{}_1^r z_{r+\varrho}\, dz_\varrho$$

bringen lässt, auf die Gestalt

$$(32^*.) \qquad \Sigma a' dx' = \sum_{\varrho} z'_{r+\varrho}\, dz'_\varrho$$

reduciren lassen, wo $z'_1, \dots z'_m$ ebenso wie $z_1, \dots z_m$ unter einander unabhängig sind. Die Substitution

$$(34.) \qquad z_\mu = z'_\mu \quad (\mu = 1, \dots m),$$

durch welche weder die Veränderlichkeit von $x_1, \dots x_n$ noch die von $x'_1, \dots x'_n$ beschränkt wird, führt also die beiden Differentialausdrücke (1.) und (1*.) in einander über. Die Uebereinstimmung der Invariante $p = 2r$

ist also die hinreichende Aequivalenzbedingung. Sind $z_1, \dots z_m$ unabhängige Veränderliche, so ist demnach der Ausdruck

$$(35.) \qquad z_{r+1}dz_1+\dots+z_{2r}dz_r,$$

in welchen sich alle Differentialausdrücke der Invariante $2r$ transformiren lassen, eine ***reducirte Form*** (im Sinne der Zahlentheorie), insofern er die Aequivalenz aller Formen der Invariante $2r$ in Evidenz setzt, und darf daher mit Recht als ***Repräsentant*** der Differentialausdrücke $2r^{\text{ter}}$ Klasse hingestellt werden.

Bringt man (1*.) in einer bestimmten und (1.) in der allgemeinsten Weise auf die reducirte Form, so stellen die Gleichungen (34.) die allgemeinste Transformation*) der beiden aequivalenten Differentialausdrücke in einander dar, was sich auf die nämliche Weise, wie in §. 11 beweisen lässt. Jede Substitution, welche (1.) in (1*.) überführt, kann daher auf eine solche Form gebracht werden, dass sie nur p nothwendige, dagegen $n-p$ überflüssige Gleichungen enthält.

Nehmen wir aber an, dass die Invariante p des Differentialausdrucks (1.) gleich $m-1=2r-1$ ist, so sind in der Determinante (15.) alle partialen Determinanten $2r^{\text{ten}}$ (und $(2r-1)^{\text{ten}}$) Grades Null. Daher müssen auch in dem Systeme (α.) alle Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und folglich besteht zwischen $z_1, \dots z_m$ eine Relation**). Dieselbe enthält, weil $z_1, \dots z_r$ unabhängig sind, eine der Grössen $z_{r+1}, \dots z_m$, etwa z_m, lässt sich also auf die Form

---

*) Von den Transformationen der reducirten Form in sich selbst will ich hier wenigstens eine, der *Legendre*schen Substitution analoge, erwähnen. Ist $\varkappa$ eine bestimmte der Zahlen von 1 bis r und

$$\sum_{\varrho}{}_1^r \frac{z_\varrho z_{r+\varrho}}{z_{r+\varkappa}} = Z_\varkappa,$$

so ist

$$dZ_\varkappa = \sum z_\varrho d\frac{z_{r+\varrho}}{z_{r+\varkappa}} + \sum \frac{z_{r+\varrho}}{z_{r+\varkappa}} dz_\varrho.$$

Daraus ergiebt sich die Gleichung

$$\sum z_{r+\varrho}dz_\varrho = z_{r+\varkappa}dZ_\varkappa - \sum z_\varrho z_{r+\varkappa} d\frac{z_{r+\varrho}}{z_{r+\varkappa}},$$

deren rechte Seite, da $d\frac{z_{r+\varkappa}}{z_{r+\varkappa}} = 0$ ist, nur aus r Gliedern besteht. In Folge dessen genügen die Quotienten $\frac{z_{r+\varrho}}{z_{r+\varkappa}}$ den nämlichen particllen Differentialgleichungen wie die Functionen z_ϱ selber.

**) Bestände zwischen $z_1, \dots z_m$ mehr als eine Relation, so würden in dem Systeme (α.) alle partialen Determinanten $(2r-1)^{\text{ten}}$ Grades Null sein. Es ver-

$$(\beta.) \qquad z_m = f(z_1, \ldots z_{m-1})$$

bringen. Wird nun ein anderer Differentialausdruck (1*.) von der Invariante $2r-1$ auf die Form (32*.) gebracht, wo

$$z'_m = f'(z'_1, \ldots z'_{m-1})$$

ist, so wird f' im Allgemeinen eine andere Function als f sein. Dann würden sich aber die Gleichungen (34.) widersprechen und keine Transformation der beiden Differentialausdrücke in einander bilden. Da folglich der eingeschlagene Weg nur für Differentialausdrücke gerader Klasse zum Ziele führt *), so wollen wir versuchen, den Fall einer ungeraden Invariante auf den einer geraden zurückzuführen.

§. 26.

Die Aequivalenz der Differentialausdrücke von ungerader Invariante $p = 2r+1$.

Wir nehmen jetzt an, dass der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten in der Determinante (15.) gleich $m = 2r$, in (16.) aber gleich $m+2$ ist, dass also die Invariante p des Differentialausdrucks (1.) gleich $2r+1$ ist. Um diesen Fall auf den einer geraden Invariante zurückzuführen, wollen wir $a_1, \ldots a_n$ so ändern, dass der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten in (15.) gleich m bleibt, in (16.) aber ebenfalls m wird. Die erste Bedingung wäre erfüllt, wenn die Elemente $a_{\alpha\beta}$ der Determinante (15.) ungeändert blieben. Dies ist nur dann der Fall, wenn $a_1, \ldots a_n$ um die partiellen Ableitungen einer Function z_0 von $x_1, \ldots x_n$ geändert werden, also a_α durch $a_\alpha - \frac{\partial z_0}{\partial x_\alpha}$ ersetzt wird. Wir wollen also

---

schwänden also alle Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades in den beiden Systemen

$$\begin{matrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial z_r}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} \\ 0 \;\ldots\; 0 & z_{r+1} \;\;\; z_{2r} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} & -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \ldots -\frac{\partial z_r}{\partial x_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} \ldots -\frac{\partial z_r}{\partial x_n} \\ z_{r+1} \;\ldots\; z_{2r} & 0 \;\ldots\; 0 \end{matrix}$$

und daher auch in der aus ihnen zusammengesetzten Determinante (16.), wider die Voraussetzung. Dieser Beweis ist an die Stelle des unrichtigen Beweises von *Clebsch* (Bd. 60, S. 218) zu setzen.

*) Zur Integration der Differentialgleichung $\Sigma a\, dx = 0$ ist die angegebene Methode auch im Falle $p = 2r-1$ brauchbar, und stimmt mit der zweiten Methode von *Clebsch* (Bd. 60, §. 10, S. 224) überein. *Clebsch* hebt nicht deutlich genug hervor, dass auf diesem Wege der Differentialausdruck (1.) im Allgemeinen nicht in der Weise auf die Gestalt (32.) gebracht wird, dass die Relation (β.) die Form $z_m = 1$ hat.

versuchen, eine Function z_0 so zu bestimmen, dass in der Determinante

$$(36.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \left(a_1-\frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \left(a_n-\frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right) \\ -\left(a_1-\frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right) & \dots & -\left(a_n-\frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Gelingt dies, so ist

$$(\alpha.)\quad \left(a_1-\frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right)dx_1+\dots+\left(a_n-\frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right)dx_n = \Sigma a\,dx-dz_0$$

ein Differentialausdruck $2r^{\text{ter}}$ Klasse. Es lassen sich also m unabhängige Functionen $z_1, \dots z_m$ so ermitteln, dass

$$(37.)\quad \Sigma a\,dx = dz_0+\sum_{\varrho}{}_1^r z_{r+\varrho}\,dz_\varrho$$

ist. Die r Functionen $z_1, \dots z_r$ sind so zu bestimmen, dass in der Determinante

$$(38.)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \left(a_1-\frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \left(a_n-\frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right) & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} \\ -\left(a_1-\frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right) & \dots & -\left(a_n-\frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Die Functionen $z_{r+1}, \dots z_{2r}$ werden dann durch Auflösung linearer Gleichungen gefunden. Dies ist zugleich die allgemeinste Weise den Differentialausdruck (1.) auf die Form (37.) zu reduciren. Denn aus (37.) folgt, dass (α.) ein Differentialausdruck $2r^{\text{ter}}$ Klasse ist. Daher muss z_0 so bestimmt werden, dass in (36.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Ist aber z_0 gefunden, so ergiebt sich die Behauptung aus §. 24. Es kommt also alles darauf an, zu beweisen, dass eine den gestellten Bedingungen genügende Function z_0 existirt, und anzugeben, wie man alle derartigen

Functionen findet. Dabei will ich gleich allgemeiner zu Werke gehen und zeigen, dass sich die $r+1$ Functionen $z_0, z_1, \dots z_r$ in beliebiger Reihenfolge so bestimmen lassen, dass $z_1, \dots z_r$ unabhängig sind und in (38.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Auf dem in §. 22 angegebenen Wege findet man in der allgemeinsten Weise $z_1, \dots z_r$, wenn z_0 bekannt ist, und allgemeiner $z_{k+1}, \dots z_r$ $(k < r)$, nachdem $z_1, \dots z_k$ und dann z_0 ermittelt sind. Daher bleibt nur übrig zu zeigen, 1) dass man auch ohne zuerst z_0 zu ermitteln, die Functionen $z_1, z_2, \dots$ den gestellten Bedingungen gemäss bestimmen kann, und 2) dass man, nachdem k dieser Functionen gefunden sind (wo k eine der Zahlen von 0 bis r ist), immer noch passende Werthe für z_0 anzugeben im Stande ist. Zu dem Ende genügt es offenbar, die folgenden beiden Behauptungen zu beweisen.

Angenommen, k unabhängige Functionen $z_1, \dots z_k$ (wo k auch Null sein kann) seien bereits so bestimmt, dass in der Determinante

$$(\beta.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Dann kann man 1), so lange $k < r$ ist, eine von $z_1, \dots z_k$ unabhängige Function z_{k+1} so bestimmen, dass auch in der Determinante

$$(\gamma.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, 2) wenn $k \leqq r$ ist, eine Function z_0 so bestimmen, dass in der Determinante

$$(\delta.) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \left(a_1 - \frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} & \left(a_n - \frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right) \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\left(a_1 - \frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right) & \dots & -\left(a_n - \frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden.

Da in der Determinante $(\beta.)$ m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist, so haben die Gleichungen

$$(\varepsilon.) \quad \begin{cases} a_{\alpha 1} u_1 + \dots + a_{\alpha n} u_n + \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} u_{n+1} + \dots + \frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha} u_{n+k} = 0 & (\alpha = 1, \dots n) \\ \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_n} u_n = 0 & (\varkappa = 1, \dots k) \end{cases}$$

$n+k-m$ verschiedene Lösungen. In denselben sind auch die Werthe von $u_1, \dots u_n$ unabhängig. Denn sonst würden (§. 3) in dem System

$$(\zeta.) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} \dots \frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots n)$$

alle Determinanten k^{ten} Grades verschwinden, während doch $z_1, \dots z_k$ als unabhängig vorausgesetzt sind.

1) Damit nun auch in $(\gamma.)$ alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist nothwendig und hinreichend, dass $f = z_{k+1}$ den $n+k-m$ partiellen Differentialgleichungen genügt, welche man aus

$$(\eta.) \quad A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

erhält, indem man für $A_1, \dots A_n$ der Reihe nach alle Werthe setzt, die sich für $u_1, \dots u_n$ aus den Gleichungen $(\varepsilon.)$ ergeben. Diesen Differentialgleichungen genügen aber alle von $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ freien Functionen, welche gleich willkürlichen Constanten gesetzt, Integrale der totalen Differential-

gleichungen

$$(\vartheta.)\quad \begin{cases} a_{\alpha 1}dx_1+\cdots+a_{\alpha n}dx_n+\dfrac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}dx_{n+1}+\cdots+\dfrac{\partial z_k}{\partial x_\alpha}dx_{n+k}=0 & (\alpha=1,\ \dots\ n)\\ \dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\dfrac{\partial z_\varkappa}{\partial x_n}dx_n =0 & (\varkappa=1,\ \dots\ k)\end{cases}$$

sind. Bedeuten α, β Zahlen von 1 bis n und $\varkappa$, λ Zahlen von 1 bis k, und setzt man

$$b_\alpha = a_\alpha+\frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}x_{n+1}+\cdots+\frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha}x_{n+k},\quad b_{n+\varkappa}=0$$

und

$$b_{\alpha\beta}=\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\beta}-\frac{\partial b_\beta}{\partial x_\alpha},$$

so ist

$$b_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta},\quad b_{\alpha,n+\varkappa}=\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_\alpha},\quad b_{n+\varkappa,n+\lambda}=0.$$

Daher können die Differentialgleichungen (ϑ.) in der Form

$$b_{\alpha 1}dx_1+\cdots+b_{\alpha n}dx_n+b_{\alpha,n+1}dx_{n+1}+\cdots+b_{\alpha,n+k}dx_{n+k}=0$$
$$(\alpha=1,\ \dots\ n,\ n+1,\ \dots\ n+k)$$

geschrieben werden. Nach §. 19 folgt daraus, dass sie ein vollständiges System bilden.

Da in dem System (ζ.) nicht alle Determinanten k^{ten} Grades verschwinden, so lassen sich die Differentialgleichungen (ϑ.) nach $dx_{n+1},\ \dots\ dx_{n+k}$ auflösen. Unter den Differentialgleichungen (ϑ.) und zwar bereits unter den n ersten sind m unabhängig. Aus ihnen lassen sich, wie in §. 22, $m-k$ von den Variablen $x_{n+1},\ \dots\ x_{n+k}$ freie herleiten. Nach §. 18 haben sie daher $m-k$ von diesen Variablen freie Integrale. Da folglich die $n-(m-k)$ partiellen Differentialgleichungen (η.) $m-k$ unabhängige Lösungen haben, so bilden sie ein vollständiges System. Zu jenen $m-k$ Lösungen gehören nach den letzten k Gleichungen (ε.) die Functionen $z_1,\ \dots\ z_k$. Die Differentialgleichungen (η.) haben daher $m-2k$ von diesen und unter einander unabhängige Lösungen, also mindestens zwei, so lange $k<r$ ist.

2) Damit in der Determinante (δ.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, ist es nothwendig und hinreichend, dass alle Werthe von $u_1,\ \dots\ u_n$, welche den Gleichungen (ε.) genügen, auch die Gleichung

$$\left(a_1-\frac{\partial z_0}{\partial x_1}\right)u_1+\cdots+\left(a_n-\frac{\partial z_0}{\partial x_n}\right)u_n=0$$

befriedigen, oder wenn man

$$(\iota.)\qquad a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = u$$

setzt, die Gleichung

$$\frac{\partial z_0}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial z_0}{\partial x_n} u_n = u.$$

Es muss also $x = z_0$ dem System nicht homogener linearer partieller Differentialgleichungen Genüge leisten, das man aus

$$(\varkappa.)\qquad A_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = A$$

erhält, indem man für $A, A_1, \ldots A_n$ der Reihe nach alle Werthe setzt, die sich aus den Gleichungen (ε.) und (ι.) für $u, u_1, \ldots u_n$ ergeben. Denkt man sich x als Function von $x_1, \ldots x_n$ durch eine Gleichung $f(x, x_1, \ldots x_n) = \alpha$ bestimmt, so genügt f dem System homogener partieller Differentialgleichungen

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Man muss also alle Lösungen dieser Differentialgleichungen ermitteln, welche x wirklich enthalten. Setzt man eine solche einer Constanten gleich, so ist sie (§. 13) ein von $x_{n+1}, \ldots x_{n+k}$ freies Integral des Systems totaler Differentialgleichungen, das von den Gleichungen (ϑ.), verbunden mit

$$(\lambda.)\qquad a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n - dx = 0$$

gebildet wird. Man erhält also jede Lösung der partiellen Differentialgleichungen ($\varkappa$.), indem man ein Integral der totalen Differentialgleichungen (ϑ.) und (λ.), das die Variable x, nicht aber $x_{n+1}, \ldots x_{n+k}$ enthält, nach x auflöst.

Die totalen Differentialgleichungen (ϑ.) haben m unabhängige Integrale, von denen $m-k$

$$(\mu.)\qquad f_{k+1} = \alpha_{k+1}, \quad \ldots \quad f_m = \alpha_m$$

von $x_{n+1}, \ldots x_{n+k}$ frei sind. Nachdem sie ermittelt sind, werden nach §. 18 für $x_{n+1}, \ldots x_{n+k}$ durch Quadraturen Ausdrücke von der Form

$$(\nu.)\qquad x_{n+1} = f_1 + \alpha_1, \quad \ldots \quad x_{n+k} = f_k + \alpha_k$$

gefunden, in denen $f_1, \ldots f_k$ Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sind. Die $m-k$

Gleichungen (μ.) und die k Gleichungen (ν.) bilden m unabhängige Integrale der Differentialgleichungen (ϑ.). Wegen der Unabhängigkeit von $f_{k+1}, \dots f_m$ ist es möglich $n-(m-k)$ Functionen $u, v, \dots$ der Variablen $x_1, \dots x_n$ so zu wählen, dass $f_{k+1}, \dots f_n, u, v, \dots n$ unabhängige Functionen dieser Veränderlichen sind. Dann sind auch umgekehrt $x_1, \dots x_n$ Functionen jener Grössen, oder wegen (μ.) allein von $u, v, \dots$, und mittelst der Gleichungen (ν.) lassen sich auch $x_{n+1}, \dots x_{n+k}$ durch diese Variablen ausdrücken. Die so bestimmten Functionen der Veränderlichen $u, v, \dots$ genügen den Gleichungen

$$a_{\alpha 1}\frac{\partial x_1}{\partial v}+\cdots+a_{\alpha n}\frac{\partial x_n}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}+\cdots+\frac{\partial z_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_{n+k}}{\partial v}=0 \quad (\alpha=1, \dots n)$$

$$\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\cdots+\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}=0 \qquad (\varkappa=1, \dots k).$$

Multiplicirt man die ersten n Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots \frac{\partial x_n}{\partial u}$ und addirt sie, so erhält man in Folge der letzten k Gleichungen

$$\sum_{\alpha,\beta}^{n} a_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u}\frac{\partial x_\beta}{\partial v}=0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(\Sigma a_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial u}\Big)-\frac{\partial}{\partial u}\Big(\Sigma a_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial v}\Big) = 0.$$

Daher wird $a_1 dx_1+\cdots+a_n dx_n$ ein vollständiges Differential, wenn man für $x_1, \dots x_n$ ihre Ausdrücke in $u, v, \dots$ setzt. Durch Integration der Differentialgleichung (λ.) ergiebt sich also eine Gleichung von der Form

$$x = \psi(u, v, \dots)+\alpha,$$

oder weil $u, v, \dots$ Functionen von $x_1, \dots x_n$ allein sind

$$x = \varphi(x_1, \dots x_n)+\alpha.$$

Die so gefundenen Functionen φ sind die sämmtlichen Lösungen des Systems partieller Differentialgleichungen ($\varkappa$.).

Da nunmehr die obigen Behauptungen beide bewiesen sind, so ist klar, dass man in beliebiger Reihenfolge die Functionen $z_0, z_1, \dots z_r$ so bestimmen kann, dass in (38.) alle partialen Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden. Man kann z. B. erst $z_1, \dots z_r$ bestimmen und findet dann z_0 durch eine Quadratur. Dies ist die von *Clebsch* (Bd. 60, §. 9, S. 222) angegebene Methode.

Aus der Gleichung (37.) ergiebt sich

$$a_\alpha = \frac{\partial z_0}{\partial x_\alpha}+\sum_\varrho z_{r+\varrho}\frac{\partial z_\varrho}{\partial x_\alpha}$$

und daher

$$a_{\alpha\beta} = \sum_\varrho \frac{\partial z_\varrho}{\partial x_\alpha}\frac{\partial z_{r+\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial z_{r+\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial z_\varrho}{\partial x_\beta}.$$

Folglich entsteht die Determinante (16.) durch Zusammensetzung der beiden Systeme

$$\begin{matrix} 0 & \frac{\partial z_0}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_1} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\partial z_0}{\partial x_n} & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} & \dots & z_{2r} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -\frac{\partial z_0}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_1} & -\frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_0}{\partial x_n} & 0 & \frac{\partial z_{r+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial z_{2r}}{\partial x_n} & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial z_r}{\partial x_n} \\ 0 & 1 & z_{r+1} & \dots & z_{2r} & 0 & \dots & 0. \end{matrix}$$

Da in (16.) der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten gleich $m+2$ ist, so können in keinem dieser beiden Systeme alle Determinanten $(m+2)^{\text{ten}}$ Grades gleich Null sein. Demnach können in dem Systeme

$$\frac{\partial z_0}{\partial x_\alpha} \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha} \quad \dots \quad \frac{\partial z_m}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

nicht alle Determinanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden und folglich sind die $m+1$ Functionen $z_0, z_1, \dots z_m$ unter einander unabhängig.

Nunmehr lassen sich aus der Gleichung (37.) die nämlichen Folgerungen ziehen, wie in §. 25 aus der Gleichung (32.). Alle Differentialausdrücke von der Invariante $p = 2r+1$ sind äquivalent. Ihre reducirte Form ist

$$(39.) \qquad dz_0 + z_{r+1}dz_1 + \dots + z_{2r}dz_r.$$

Sie bilden die $(2r+1)^{\text{te}}$ Klasse, deren ***Repräsentant*** der Ausdruck (39.) ist, wenn in demselben $z_0, z_1, \dots z_{2r}$ unabhängige Veränderliche bedeuten. Die allgemeinste Transformation zweier Differentialausdrücke p^{ter} Klasse in einander wird gefunden, indem man den einen in einer bestimmten, den andern in der allgemeinsten Weise auf die reducirte Form bringt, und dann die p Variablen der einen reducirten Form denen der anderen der Reihe nach gleichsetzt. Jede Substitution, welche einen Differentialausdruck p^{ter} Klasse in einen anderen überführt, kann auf eine solche Form gebracht werden, dass sie nur p nothwendige, dagegen $n-p$ überflüssige Gleichungen enthält.

Damit ist die Eintheilung der linearen Differentialausdrücke erster Ordnung in Klassen vollendet. Die Differentialausdrücke erster Klasse sind die vollständigen Differentiale; ihr Repräsentant ist dz_0. Die zweiter Klasse

können durch einen Factor zu einem vollständigen Differentiale gemacht werden; ihr Repräsentant ist $z_2 dz_1$, wo z_1 und z_2 unabhängig sind. Sind $z_0, z_1, \dots z_{2r}$ unabhängige Veränderliche, so repräsentirt (35.) die Differentialausdrücke $2r^{\text{ter}}$ und (39.) die $(2r+1)^{\text{ter}}$ Klasse.

§. 27.

Transformation eines Differentialausdrucks in einen anderen mit weniger Variablen.

Clebsch hat gezeigt (dieses Journal, Bd. 61, S. 147), dass ein Differentialausdruck $a_1 dx_1 + \dots + a_m dx_m$, für welchen die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$ von Null verschieden ist, also m eine gerade Zahl $(=2r)$ ist, auf die Form $z_{r+1} dz_1 + \dots + z_{2r} dz_r$ gebracht werden kann, in der $z_1, \dots z_m$ unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n$ sind. Wenn man dieses Resultat als bekannt voraussetzt, so lässt sich der Beweis des Satzes, dass für irgend zwei Differentialausdrücke die Uebereinstimmung der Invariante p die hinreichende Aequivalenzbedingung ist, leicht in der folgenden Weise führen, die eine Erweiterung der ursprünglichen *Pfaff*schen Methode ist (Vgl. §. 12).

Ist in der Determinante (15.) $m(=2r)$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, so enthält das nach §. 19 vollständige System

$$(27.) \qquad a_{\alpha 1} dx_1 + \dots + a_{\alpha n} dx_n = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots n)$$

m unabhängige Differentialgleichungen, und hat m unabhängige Integrale $y_\mu = \beta_\mu \, (\mu = 1, \dots m)$. Es ist nun möglich die $n-m$ Functionen $y_\nu \, (\nu = m+1, \dots n)$ der Variablen $x_1, \dots x_n$ so zu wählen, dass $y_1, \dots y_n$ n unabhängige Functionen sind. (Ist z. B., was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$ von Null verschieden, so sind (§. 18) $y_1, \dots y_m$, als Functionen von $x_1, \dots x_m$ betrachtet, unabhängig, und daher kann man $y_\nu = x_\nu \, (\nu = m+1, \dots n)$ setzen.) Dann sind $x_1, \dots x_n$ n unabhängige Functionen von $y_1, \dots y_n$, welche den Gleichungen

$$(\alpha.) \qquad a_{\alpha 1} \frac{\partial x_1}{\partial y_\nu} + \dots + a_{\alpha n} \frac{\partial x_n}{\partial y_\nu} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots n;\ \nu = m+1, \dots n)$$

genügen. Nun gehe der Differentialausdruck (1.), wenn $y_1, \dots y_n$ als unabhängige Variable eingeführt werden, in

$$(\beta.) \quad \Sigma a\, dx = b_1 dy_1 + \dots + b_m dy_m + b_{m+1} dy_{m+1} + \dots + b_n dy_n = \Sigma b_\mu dy_\mu + \Sigma b_\nu dy_\nu$$

über, wo

$$(\gamma.)\qquad b_\gamma = \Sigma a \frac{\partial x}{\partial y_\gamma} \qquad (\gamma = 1, \ldots n)$$

ist, μ (hier wie im Folgenden) die Zahlen von 1 bis m, ν die von $m+1$ bis n durchläuft. Multiplicirt man die Gleichung (α.) mit $\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\gamma}$ und summirt man nach α von 1 bis n, so erhält man

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\gamma} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_\nu} = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial y_\nu}\left(\Sigma a \frac{\partial x}{\partial y_\gamma}\right) - \frac{\partial}{\partial y_\gamma}\left(\Sigma a \frac{\partial x}{\partial y_\nu}\right) = 0$$

oder endlich nach (γ.)

$$(\delta.)\qquad b_{\gamma\nu} = \frac{\partial b_\gamma}{\partial y_\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial y_\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1, \ldots n;\ \nu = m+1, \ldots n).$$

Es verschwindet also $b_{\alpha\beta}$, wenn eine der Zahlen α oder β grösser als m ist. Von den partialen Determinanten m^{ten} Grades der Determinante n^{ten} Grades $|b_{\alpha\beta}|$ kann daher nur $\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{mm} = B$ von Null verschieden sein. Da aber (§. 21.) in $|b_{\alpha\beta}|$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ebenso gross ist, wie in $|a_{\alpha\beta}|$, also gleich m, so muss B von Null verschieden sein. Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Der Ausdruck (1.) lasse sich linear aus den Ausdrücken (27.) zusammensetzen. Dann ist (§. 7) auch in der Determinante (16.) m der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, und die Invariante p ist gleich $2r$.

Aus den Gleichungen (α.) folgt in diesem Falle

$$b_\nu = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_\nu} + \cdots + a_n \frac{\partial x_n}{\partial y_\nu} = 0.$$

Nach Formel (δ.) ist daher

$$\frac{\partial b_\gamma}{\partial y_\nu} = 0$$

und nach Gleichung (β.)

$$\Sigma a\, dx = \Sigma b_\mu dy_\mu,$$

wo $b_1, \ldots b_m$ nur die Variablen $y_1, \ldots y_m$ enthalten, und die Determinante B von Null verschieden ist. Nach dem als bekannt vorausgesetztem Satze von *Clebsch* lassen sich daher $m(=2r)$ unabhängige Functionen $z_1, \ldots z_m$ von

$y_1, \dots y_m$ so bestimmen, dass

$$\Sigma b_\mu dy_\mu = \Sigma_\varrho{}_1^r z_{r+\varrho} dz_\varrho$$

ist. Drückt man $y_1, \dots y_m$ durch $x_1, \dots x_n$ aus, so sind $z_1, \dots z_m$ m unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n$, welche der Gleichung

$$(32.) \qquad \Sigma a dx = \Sigma_\varrho{}_1^r z_{r+\varrho} dz_\varrho$$

genügen.

2) Der Ausdruck (1.) lasse sich nicht linear aus den Ausdrücken (27.) zusammensetzen. Dann ist in der Determinante (16.) $m+2$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten, und die Invariante p ist gleich $2r+1$. Die Gleichungen (δ.) zeigen, dass $\Sigma b_\nu dy_\nu$, wenn $y_1, \dots y_m$ als constant betrachtet werden, das vollständige Differential einer Function z_0 von $y_1, \dots y_n$ ist, dass also

$$(\varepsilon.) \qquad b_\nu = \frac{\partial z_0}{\partial y_\nu}, \qquad (\nu = m+1, \dots n)$$

$$\Sigma b_\nu dy_\nu = \Sigma \frac{\partial z_0}{\partial y_\nu} dy_\nu = dz_0 - \Sigma \frac{\partial z_0}{\partial y_\mu} dy_\mu$$

und daher nach Gleichung (β.)

$$(\zeta.) \qquad \Sigma a dx = dz_0 + \Sigma c_\mu dy_\mu$$

ist, wo

$$(\eta.) \qquad c_\mu = b_\mu - \frac{\partial z_0}{\partial y_\mu} \qquad (\mu = 1, \dots m)$$

gesetzt ist. Da nach den Formeln (ε.) und (η.)

$$\frac{\partial b_\mu}{\partial y_\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial y_\mu} = \frac{\partial c_\mu}{\partial y_\nu}$$

ist, so ergiebt sich aus Gleichung (δ.)

$$\frac{\partial c_\mu}{\partial y_\nu} = 0.$$

Die Functionen $c_1, \dots c_m$ hängen also nur von $y_1, \dots y_m$ ab. Sind ferner α und β beide kleiner als m, so ist nach Formel (η.)

$$c_{\alpha\beta} = \frac{\partial c_\alpha}{\partial y_\beta} - \frac{\partial c_\beta}{\partial y_\alpha} = b_{\alpha\beta}.$$

Folglich ist die Determinante

$$\Sigma \pm c_{11} \dots c_{mm} = B,$$

also von Null verschieden. Daher lassen sich m unabhängige Functionen $z_1, \dots z_m$ von $y_1, \dots y_m$ so bestimmen, dass

$$\Sigma c_\mu \, dy_\mu = \sum_\varrho {}_1^r z_{r+\varrho} \, dz_\varrho$$

und folglich nach (ζ.)

$$(37.) \qquad \Sigma a \, dx = dz_0 + \sum_\varrho {}_1^r z_{r+\varrho} \, dz_\varrho$$

wird. Die Unabhängigkeit der $m+1$ Functionen $z_0, z_1, \dots z_m$ ist schon in §. 26, S. 311 aus der Voraussetzung bewiesen, dass in der Determinante (16.) $m+2$ der höchste Grad nicht verschwindender Unterdeterminanten ist.

Zürich, im September 1876.

Druckfehler.

S. 231, Z. 15 statt „in einer Determinante“ lese man „in einer schiefen Determinante.“

Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

1.

Die gesammelten mathematischen Werke *Riemanns*, deren Herausgabe ein bleibendes Verdienst der Herren *R. Dedekind* und *H. Weber* bildet, enthalten die in lateinischer Sprache verfasste Beantwortung einer im Jahre 1858 gestellten Aufgabe der Pariser Akademie über ein Problem der Wärmevertheilung, durch welche Arbeit die Schrift *Riemanns über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* auf das merkwürdigste ergänzt wird. In dem zweiten Theile der erwähnten Arbeit entwickelt *Riemann* die Bedingungen dafür, dass eine gegebene quadratische Form von n Differentialen, deren Coefficienten beliebige Functionen der n betreffenden Variabeln sind, in eine Form mit constanten Coefficienten transformirbar sei, und fasst diese Bedingungen dahin zusammen, dass bei einer gewissen nach zwei Systemen von Differentialen quadratischen und zu der gegebenen Form covarianten Form, die am angeführten Orte pag. 382 mit (II.) bezeichnet ist, die sämmtlichen Coefficienten verschwinden müssen. Dieses Kriterium fällt mit demjenigen zusammen, welches für dieselbe Frage in der Abhandlung: „Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen," Bd. 70 dieses Journals, pag. 71 von mir abgeleitet ist. Die daselbst pag. 84 definirte nach vier Systemen von Differentialen lineare Form Ψ, welche auch gleich der von Herrn *Christoffel* in demselben Bande des Journals pag. 58 als G_4 bezeichneten Form ist, geht in *Riemanns* angeführte Form (II.) über, sobald in der ersteren zwei und zwei von den zugehörigen Systemen von Differentialen einander gleich gesetzt werden, und nach pag. 94 des citirten Bandes besteht die ***nothwendige*** und ***hinreichende Bedingung*** dafür, dass die gegebene quadratische Form von n Differentialen in eine quadratische Form mit constanten Coefficienten verwandelt werden könne, in dem identischen Verschwinden der zugehörigen quadrilineären Form Ψ. Mit Hülfe der genannten Form (II.) stellt *Riemann* an jenem Orte einen analytischen Ausdruck (III.) für den von ihm begründeten Begriff des Krümmungsmasses in einer Mannigfaltigkeit der n^{ten} Ordnung auf, bei der die gegebene quadratische

Form von n Differentialen das Quadrat des Linearelements vertritt, der Ausdruck (III.) kommt aber auf den analytischen Ausdruck desselben Begriffes hinaus, welcher in der Abhandlung: Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Bd. 72 dieses Journals, pag. 1 und zwar auf pag. 24 für die dortige Grösse k_0 gegeben ist, und stimmt mit demjenigen Ausdrucke vollständig überein, der in *Darboux*s Bulletin Bd. 4 pag. 150 angeführt und Bd. 81 dieses Journals, pag. 241 wiederholt ist.

Riemann hat von der mit (II.) bezeichneten Form, nachdem das Bildungsgesetz ihrer Coefficienten angegeben ist, noch eine zweite Darstellungsweise mitgetheilt, bei der verschiedene Gattungen von Variationszeichen gebraucht werden und drei Gleichungen zwischen den Variationen der zweiten Ordnung vorgeschrieben sind. Dieser eigenthümliche Algorithmus findet seine Erklärung in einem Umstande, der mir schon seit einigen Jahren bekannt ist. Die zu der gegebenen quadratischen Form von n Differentialen covariante Form (II.) kann nämlich als das Aggregat von zwei Covarianten aufgefasst werden, von denen die eine gleich dem betreffenden zweiten Ausdrucke *Riemann*s ist, die andere aber vermöge der bezeichneten Gleichungen *Riemann*s verschwindet. Die letztere Covariante ist nun in ihren wesentlichen Bestandtheilen dieselbe Covariante, welche bei dem Princip des kleinsten Zwanges zu einem Minimum gemacht werden muss, und bezeichnet insofern den Gegenstand der gegenwärtigen Arbeit.

Das eben angedeutete Resultat kann aus einer Gleichung geschlossen werden, die in der zweiten citirten Abhandlung Bd. 72 dieses Journals pag. 16 als (37.) vorkommt. Es sei, wie an dieser Stelle, die gegebene quadratische Form der n Differentiale $dx_{\mathfrak{a}}$, deren Coefficienten beliebige Functionen der n Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ sind, und wo die Zeiger $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... von 1 bis n gehen, die folgende

$$(1.)\qquad f(dx) = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}},$$

es sei die aus derselben abgeleitete bilineare Form

$$(2.)\qquad f(dx, \overset{1}{d}x) = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_{\mathfrak{a}}\, dx_{\mathfrak{b}},$$

man habe ferner durch unbeschränkte Anwendung der drei Variationszeichen d, $\overset{1}{d}$, δ die Gleichung

$$(3.)\qquad -\delta f(dx, \overset{1}{d}x) + d f(\delta x, \overset{1}{d}x) + \overset{1}{d} f(\delta x, dx) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, d\overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}}\, \delta x_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{a}} f_{\mathfrak{a}}(dx, \overset{1}{d}x)\, \delta x_{\mathfrak{a}},$$

Dann ist $f_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx})$ eine in Bezug auf die Differentiale $dx_\mathfrak{g}$ und $\overset{1}{dx}_\mathfrak{b}$ bilineare Form, welche diese entwickelte Gestalt hat

$$(4.)\quad \begin{cases} f_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{g}\, \overset{1}{dx}_\mathfrak{b} \\ \qquad = \frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{b}} + \frac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial x_\mathfrak{g}} - \frac{\partial a_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}}}{\partial x_\mathfrak{a}}\right) dx_\mathfrak{g}\, \overset{1}{dx}_\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Es sei ausserdem

$$(5.)\quad \sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, d\overset{1}{dx}_\mathfrak{b} + f_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx}) = \Psi_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx}),$$

mithin

$$(6.)\quad -\delta f(dx, \overset{1}{dx}) + df(\delta x, \overset{1}{dx}) + \overset{1}{d}f(\delta x, dx) = \sum_\mathfrak{a} \Psi_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx})\,\delta x_\mathfrak{a}.$$

Setzt man die Verbindungen $\Psi_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx})$ gleich linearen Ausdrücken mit den Coefficienten $a_{\mathfrak{a},1}, a_{\mathfrak{a},2}, \dots a_{\mathfrak{a},n}$, das heisst

$$(7.)\quad \sum_\mathfrak{b} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\left(d\overset{1}{dx}_\mathfrak{b} + \xi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{dx})\right) = \Psi_\mathfrak{a}(dx, \overset{1}{dx}),$$

so bekommen die Verbindungen $\xi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{dx})$ mit Hülfe der von Null verschiedenen Determinante $|a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}| = \Delta$ und der adjungirten Elemente $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} = A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die Definition

$$(8.)\quad \xi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{dx}) = \sum_\mathfrak{c} \frac{A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\Delta} f_\mathfrak{c}(dx, \overset{1}{dx}).$$

Alsdann wird die oben erwähnte nach den vier Systemen von Differentialen $\overset{1}{dx}_\mathfrak{a}$, $\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b}$, $dx_\mathfrak{g}$, $\delta x_\mathfrak{b}$ lineare, zu der gegebenen Form $f(dx)$ covariante Form $\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)$ durch die gleichfalls erwähnte Gleichung (37.) so ausgedrückt

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x) = \sum_\mathfrak{b}\left(d\Psi_\mathfrak{b}(\delta x, \overset{1}{dx})\,\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b} - \Psi_\mathfrak{b}(\delta x, \overset{1}{dx})\,\xi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{\delta x})\right) \\ \qquad - \sum_\mathfrak{b}\left(\delta\Psi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{dx})\,\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b} - \Psi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{dx})\,\xi_\mathfrak{b}(\delta x, \overset{1}{\delta x})\right). \end{cases}$$

Man erhält nun die gewünschte Umformung, indem man den Ausdruck $\xi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{\delta x})$ durch das Aggregat der Ausdrücke $-d\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b}$ und $d\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b} + \xi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{\delta x})$, den Ausdruck $\xi_\mathfrak{b}(\delta x, \overset{1}{\delta x})$ durch das Aggregat der entsprechenden Ausdrücke $-\delta\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b}$ und $\delta\overset{1}{\delta x}_\mathfrak{b} + \xi_\mathfrak{b}(\delta x, \overset{1}{\delta x})$ ersetzt. Dadurch wird

die Form $\frac{1}{2}\Psi(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)$ gleich dem Aggregat der Verbindung

$$(10.)\quad \begin{cases} \sum_{\mathfrak{b}} (d\Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}} + \Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)\, d\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}}) \\ -\sum_{\mathfrak{b}} (\delta\Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}} + \Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\, \delta\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}}) \end{cases}$$

und der Verbindung

$$(11.)\quad \begin{cases} -\sum_{\mathfrak{b}} \Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)(d\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}} + \xi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{\delta}x)) \\ +\sum_{\mathfrak{b}} \Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)(\delta\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}} + \xi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{\delta}x)). \end{cases}$$

Die Verbindung (10.) ist offenbar gleich der vollständigen Variation $d\sum_{\mathfrak{b}} \Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}}$, vermindert um die vollständige Variation $\delta\sum_{\mathfrak{b}} \Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\overset{1}{\delta}x_{\mathfrak{b}}$. Die zu variirenden Summen können aber vermittelst der Formel (6.) als Aggregate von ersten Variationen dargestellt werden. Somit erscheint die Verbindung (10.) als das Aggregat von zweiten Variationen

$$(12.)\quad d\overset{1}{d}f(\delta x, \overset{1}{\delta}x) + \delta\overset{1}{\delta}f(dx, \overset{1}{d}x) - d\overset{1}{\delta}f(\delta x, \overset{1}{d}x) - \delta\overset{1}{d}f(dx, \overset{1}{\delta}x).$$

Die Ausdrücke $d\overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}} + \xi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)$ lassen sich vermöge der Gleichung (7.) folgendermassen darstellen

$$(7^*.)\quad d\overset{1}{d}x_{\mathfrak{b}} + \xi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x) = \sum_{\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\Delta}\Psi_{\mathfrak{c}}(dx, \overset{1}{d}x);$$

mithin nimmt die Verbindung (11.) die Gestalt an

$$(13.)\quad \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\Delta}(\Psi_{\mathfrak{b}}(dx, \overset{1}{d}x)\Psi_{\mathfrak{c}}(\delta x, \overset{1}{\delta}x) - \Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x, \overset{1}{d}x)\Psi_{\mathfrak{c}}(dx, \overset{1}{\delta}x)).$$

Sowohl die Verbindung (12.), wie auch die Verbindung (13.) ist eine Covariante der Form $f(dx)$, wofür die Gründe an der citirten Stelle Bd. 72 pag. 16 und 17 dieses Journals angegeben sind. ***Demnach gilt der Satz, dass der halbe Werth der Form*** $\Psi(\overset{1}{d}x, \overset{1}{\delta}x, dx, \delta x)$ ***gleich dem Aggregat der Covariante*** (12.) ***und der Covariante*** (13.) ***ist.*** Beide Covarianten enthalten erste und zweite Variationen der Variabeln, jedoch heben sich bei der Bildung ihres Aggregats die sämmtlichen zweiten Variationen gegen einander auf, und es bleiben nur die ersten Variationen übrig.

Um den Uebergang zu *Riemanns* Formeln zu machen, wird jetzt das Variationszeichen $\overset{1}{d}$ dem Variationszeichen d, und das Zeichen $\overset{1}{\delta}$ dem Zeichen δ gleich gesetzt. Dann verwandelt sich die Covariante (12.) bei

vollständiger Darstellung der quadratischen und bilinearen Formen in den Ausdruck

$$(14.)\quad \tfrac{1}{2}\,dd\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,\delta x_{\mathfrak{a}}\,\delta x_{\mathfrak{b}} - d\delta\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,dx_{\mathfrak{a}}\,\delta x_{\mathfrak{b}} + \tfrac{1}{2}\,\delta\delta\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,dx_{\mathfrak{a}}\,dx_{\mathfrak{b}},$$

und die Covariante (13.) in den Ausdruck

$$(15.)\quad \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\Delta}\left(\Psi_{\mathfrak{b}}(dx,dx)\,\Psi_{\mathfrak{c}}(\delta x,\delta x) - \Psi_{\mathfrak{b}}(dx,\delta x)\,\Psi_{\mathfrak{c}}(dx,\delta x)\right).$$

Zugleich ist in Folge des bewiesenen Satzes das Aggregat der beiden Ausdrücke (14.) und (15.) gleich dem halben Werthe der Form $\Psi(dx,\delta x,dx,\delta x)$. In den Untersuchungen, welchen sich die gegenwärtige anschliesst, ist nach Bd. 72 dieses Journals, pag. 24 das Quadrat des Linearelements für die Mannigfaltigkeit der n Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ mit $2f(dx) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,dx_{\mathfrak{a}}\,dx_{\mathfrak{b}}$ bezeichnet worden. Also hat diese quadratische Form dieselbe Bedeutung wie ***Riemanns*** quadratische Form $\Sigma b_{\iota,\iota'}\,ds_{\iota}\,ds_{\iota'}$, und gleichzeitig entspricht die Form $\Psi(dx,\delta x,dx,\delta x)$ der ersten Darstellung von ***Riemanns*** Form (II.). Somit erkennt man, dass der halbe Werth von ***Riemanns*** Form (II.) gleich dem Aggregate der Covarianten (14.) und (15.) ist. Bei der eingeführten Bezeichnung wird ferner der obige Ausdruck (14.) gleich dem halben Werthe des Ausdrucks, welcher sich in ***Riemanns*** Werken pag. 381 auf der fünften Zeile von unten befindet, und die zweite Darstellung seiner Form (II.) bildet. Nun sagen die drei Gleichungen ***Riemanns***, die an dem Ende derselben Seite stehen, aus, dass die Verbindungen $\Psi_{\mathfrak{b}}(dx,\delta x)$, $\Psi_{\mathfrak{b}}(dx,dx)$, $\Psi_{\mathfrak{b}}(\delta x,\delta x)$ gleich Null zu nehmen sind, denn auf Grund der obigen Gleichung (6.) stimmen die linken Seiten der drei Gleichungen beziehungsweise mit den drei Ausdrücken

$$-2\sum_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}}(dx,\delta x)\,\overset{1}{\delta} x_{\mathfrak{a}},$$
$$-2\sum_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}}(dx,dx)\,\overset{1}{\delta} x_{\mathfrak{a}},$$
$$-2\sum_{\mathfrak{a}} \Psi_{\mathfrak{a}}(\delta x,\delta x)\,\overset{1}{\delta} x_{\mathfrak{a}}$$

überein, diese Summen müssen unabhängig von den n Variationen $\overset{1}{\delta} x_{\mathfrak{a}}$ verschwinden, und das kann nur dadurch geschehen, dass die in Rede stehenden Verbindungen selbst verschwinden. Es bestätigt sich daher, dass in Folge der von ***Riemann*** aufgestellten drei Gleichungen die Covariante (15.) gleich Null wird. Da nun der halbe Werth der Form $\Psi(dx,\delta x,dx,\delta x)$ gleich

dem Aggregat der Covarianten (14.) und (15.) ist, so liefert unter der genannten Voraussetzung die Covariante (14.) für sich allein eine Darstellung des halben Werthes der Form $\Psi(dx, \delta x, dx, \delta x)$. Wie schon bemerkt, ist die Form $\Psi(dx, \delta x, dx, \delta x)$ gleich *Riemanns* Form (II.) und die Covariante (14.) gleich dem halben Werthe von *Riemanns* zweiter Darstellung der Form (II.). Also haben wir *Riemanns* zweite Darstellung seiner Form (II.) aus der vorhin nachgewiesenen Eigenschaft der Form $\Psi(\overset{1}{dx}, \overset{1}{\delta x}, dx, \delta x)$ abgeleitet, gleich einem Aggregate von zwei Covarianten zu sein.

2.

Es handelt sich jetzt um die Entwickelung des Zusammenhanges zwischen der Covariante (15.) des vorigen Art. und demjenigen Ausdrucke, welcher bei dem Princip des kleinsten Zwanges zu einem Minimum gemacht werden muss. Doch ist hier eine gewisse Schwierigkeit zu überwinden. *Gauss* hat sein Princip Bd. 4 dieses Journals pag. 232 bekanntlich in Worten, aber nicht in analytischen Zeichen ausgedrückt, und dann durch synthetische Betrachtungen auf *D'Alemberts* Princip und das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zurückgeführt. Daher fehlt eine von *Gauss* selbst herrührende analytische Formulirung seines Princips, und dies ist um so mehr zu bedauern, da die von *Gauss* bei der Formulirung gebrauchten Worte an einer Stelle eine mehrfache Deutung zulassen. Es steht nämlich nicht von vorne herein fest, in welchem Sinne der Ausdruck: freie Bewegung eines Punktes aufgefasst werden soll. Um die Frage in ein helles Licht zu setzen, denken wir uns, dass die Massenpunkte des in Bewegung begriffenen Systems auf ein System rechtwinkliger Coordinaten bezogen seien; diese mögen für den ersten Massenpunkt z_1, z_2, z_3, für den zweiten Massenpunkt z_4, z_5, z_6 u. s. f., für den letzten Massenpunkt z_{n-2}, z_{n-1}, z_n heissen, die Masse des ersten Punktes werde mit $m_1 = m_2 = m_3$, die Masse des zweiten Punktes mit $m_4 = m_5 = m_6$ bezeichnet, u. s. f., die Componenten der wirkenden Kräfte, nach denselben drei Axen zerlegt, seien für den ersten Punkt beziehungsweise Z_1, Z_2, Z_3, für den zweiten Punkt Z_4, Z_5, Z_6, u. s. f., das System von Punkten sei einer Reihe von Bedingungsgleichungen unterworfen $\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}, \ldots \Phi_l = \text{const}$, welche nur von den Coordinaten abhängen, und weder die Zeit t noch die nach der Zeit genommenen Ableitungen der Coordinaten enthalten. Es kann nun keinem Zweifel unterworfen sein, dass die für

einen Zeitmoment t gegebenen Werthe der Coordinaten aller Massenpunkte den $\mathfrak{l}$ Bedingungsgleichungen

$$\Phi_1 = \text{const}, \quad \Phi_2 = \text{const}, \quad \ldots \quad \Phi_{\mathfrak{l}} = \text{const}$$

genügen müssen. Was dagegen die auf denselben Zeitmoment bezüglichen nach dem rechtwinkligen Coordinatensystem genommenen Componenten der Geschwindigkeit der einzelnen Massenpunkte anlangt, so existirt eine doppelte Möglichkeit. Entweder die Componenten der Geschwindigkeit sind so gewählt, dass sie sich mit jenen $\mathfrak{l}$ Bedingungsgleichungen in Uebereinstimmung befinden, und die aus denselben folgenden $\mathfrak{l}$ Gleichungen

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi_2}{dt} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\Phi_{\mathfrak{l}}}{dt} = 0$$

befriedigen, oder sie sind so gewählt, dass sie denselben widersprechen. Der von *Gauss* gebrauchte Ausdruck: freie Bewegung eines Punktes verträgt sich mit jeder der beiden Annahmen. Um daher den wahren Inhalt von dem Princip des kleinsten Zwanges zu ermitteln, scheint nichts übrig zu bleiben, als dasselbe unter jeder der beiden Annahmen nach *Gauss*' Worten analytisch zu formuliren, und hierauf beide Male zu untersuchen, ob das Princip zu einer richtigen Darstellung des Bewegungsproblems führe. Diese Prüfung wird lehren, dass die Gültigkeit des Princips nur für die erste Annahme besteht.

Unter der bezeichneten ersten Annahme sind für den Zeitmoment t sowohl die Coordinaten der einzelnen Massenpunkte wie auch die nach der Zeit t genommenen ersten Ableitungen derselben als gegeben zu betrachten. Dagegen gelten die zweiten nach der Zeit t genommenen Ableitungen der Coordinaten als unbekannt, und sollen gerade durch das Princip des kleinsten Zwanges bestimmt werden. Wenn τ einen kleinen Zuwachs der Zeit t bedeutet, so nehmen die rechtwinkligen Coordinaten eines dem bewegten System angehörenden Massenpunktes, zum Beispiel des ersten Massenpunktes, zu der Zeit $t+\tau$, bei einer bis zu der Ordnung τ^2 gehenden Genauigkeit für die zu bestimmende wirkliche Bewegung respective die Werthe an

$$\mathfrak{z}_1 + \frac{d\mathfrak{z}_1}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{z}_1}{dt^2}\tau^2,$$

$$\mathfrak{z}_2 + \frac{d\mathfrak{z}_2}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{z}_2}{dt^2}\tau^2,$$

$$\mathfrak{z}_3 + \frac{d\mathfrak{z}_3}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{z}_3}{dt^2}\tau^2.$$

Dagegen würden die bezüglichen Coordinaten desselben Punktes zu derselben Zeit, wenn die Bewegung unter dem Einfluss der gegebenen auf diesen Punkt wirkenden Kraft als eine freie erfolgte, diese sein

$$z_1 + \frac{dz_1}{dt}\cdot\tau + \frac{1}{2}\frac{Z_1}{m_1}\tau^2,$$

$$z_2 + \frac{dz_2}{dt}\tau + \frac{1}{2}\frac{Z_2}{m_2}\tau^2,$$

$$z_3 + \frac{dz_3}{dt}\cdot\tau + \frac{1}{2}\frac{Z_3}{m_3}\tau^2.$$

Daher wird das Quadrat der Ablenkung des ersten Punktes von seiner freien Bewegung durch die Summe der Quadrate der entsprechenden Coordinatendifferenzen gemessen und hat den Ausdruck

$$\left(\left(\frac{d^2z_1}{dt^2} - \frac{Z_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{d^2z_2}{dt^2} - \frac{Z_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z_3}{dt^2} - \frac{Z_3}{m_3}\right)^2\right)\frac{\tau^4}{4}.$$

Nach der von *Gauss* gegebenen Regel ist derselbe mit der Masse des betreffenden Punktes zu multipliciren, die wir $m_1 = m_2 = m_3$ genannt haben, und dann stellt die Summe von den in gleicher Weise für alle Punkte des Systems gebildeten Produkten den Ausdruck dar, der zu einem Minimum werden soll. Diese Summe wird gleich dem Produkt des als unveränderlich zu betrachtenden Faktors $\frac{\tau^4}{4}$ in die Verbindung

$$(1.) \qquad \sum_a m_a \left(\frac{d^2z_a}{dt^2} - \frac{Z_a}{m_a}\right)^2,$$

bei der der Buchstabe a wie in Art. 1 die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchläuft. Das Princip des kleinsten Zwanges lässt sich demnach so aussprechen, dass für die gegebenen Werthe der z_a und der $\frac{dz_a}{dt}$ die Grössen $\frac{d^2z_a}{dt^2}$ so bestimmt werden sollen, dass die Verbindung (1.) zu einem Minimum wird.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe sind vor allen Dingen die Gleichungen zu erwägen, welchen die gesuchten Grössen $\frac{d^2z_a}{dt^2}$ genügen müssen. Wird eine beliebige der Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_l$ mit Φ_α bezeichnet, so folgt aus jeder Bedingungsgleichung $\Phi_\alpha = \text{const}$ erstens die schon erwähnte Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{d\Phi_\alpha}{dt} = \sum_a \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a}\frac{dz_a}{dt} = 0,$$

welche durch die ersten Ableitungen der Coordinaten erfüllt ist, und zweitens die Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{d^2\Phi_\alpha}{dt^2}=\sum_a\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial z_a}\frac{d^2z_a}{dt^2}+\sum_{a,b}\frac{\partial^2\Phi_\alpha}{\partial z_a\partial z_b}\frac{dz_a}{dt}\frac{dz_b}{dt}=0,$$

welche durch die zweiten Ableitungen der Coordinaten erfüllt werden muss. Weil aber unter den obwaltenden Verhältnissen die Werthe z_a und $\frac{dz_a}{dt}$ fest sind, so drücken die $\mathfrak{l}$ Gleichungen (3.) nur aus, dass die auftretenden Aggregate $\sum_a\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial z_a}\frac{d^2z_a}{dt^2}$ unveränderlichen Werthen gleich sein müssen. Die zu lösende Minimumsaufgabe führt daher, wenn man die unbestimmten Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{\mathfrak{l}}$ anwendet, nach den bekannten Regeln zu den n Gleichungen

$$(4.)\qquad m_a\left(\frac{d^2z_a}{dt^2}-\frac{Z_a}{m_a}\right)=\lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_a}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_a}+\cdots+\lambda_{\mathfrak{l}}\frac{\partial\Phi_{\mathfrak{l}}}{\partial z_a}.$$

Diese sind aber nichts anderes, als die Differentialgleichungen des vorgelegten Bewegungsproblems. Mithin ist das Princip des kleinsten Zwanges für die getroffene erste Annahme gerechtfertigt.

Die zweite Annahme wird dadurch charakterisirt, dass die gegebenen Geschwindigkeitscomponenten den $\mathfrak{l}$ Gleichungen (2.) *nicht* entsprechen; die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten mögen für den ersten Punkt ζ_1, ζ_2, ζ_3, für den zweiten Punkt ζ_4, ζ_5, ζ_6 genannt werden, u. s. f. Die Bewegung der einzelnen Punkte kann alsdann in der That nicht mit solchen Werthen der ersten Ableitungen der Coordinaten erfolgen, die den gegebenen Werthen gleich sind, und aus diesem Grunde sind jetzt sowohl die ersten wie die zweiten nach der Zeit genommenen Ableitungen der Coordinaten als unbekannte Grössen aufzufassen. Die rechtwinkligen Coordinaten des ersten Massenpunktes zu der Zeit $t+\tau$ haben deshalb bei einer bis zu der Ordnung τ^2 gehenden Genauigkeit für die zu bestimmende wirkliche Bewegung die vorhin aufgestellten Ausdrücke; die betreffenden Coordinaten desselben Punktes erhalten dagegen für die nunmehr supponirte, mit den gegebenen Geschwindigkeitscomponenten und unter dem Einfluss der zugehörigen wirkenden Kraft erfolgende freie Bewegung die folgenden Ausdrücke

$$z_1+\zeta_1\tau+\tfrac{1}{2}\frac{Z_1}{m_1}\tau^2,$$

$$z_2+\zeta_2\tau+\tfrac{1}{2}\frac{Z_2}{m_2}\tau^2,$$

$$z_3+\zeta_3\tau+\tfrac{1}{2}\frac{Z_3}{m_3}\tau^2.$$

Das Quadrat der Abweichung des ersten Punktes von seiner freien Bewegung wird mithin gleich der Quadratsumme der Coordinatendifferenzen

$$\left(\left(\frac{dz_1}{dt}-\zeta_1\right)\tau+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z_1}{dt^2}-\frac{Z_1}{m_1}\right)\tau^2\right)^2+\left(\left(\frac{dz_2}{dt}-\zeta_2\right)\tau+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z_2}{dt^2}-\frac{Z_2}{m_2}\right)\tau^2\right)^2$$
$$+\left(\left(\frac{dz_3}{dt}-\zeta_3\right)\tau+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z_3}{dt^2}-\frac{Z_3}{m_3}\right)\tau^2\right)^2.$$

Indem man dieselbe mit der Masse des betreffenden Punktes $m_1 = m_2 = m_3$ multiplicirt, alle Punkte des Systems ebenso behandelt und die Summe der erhaltenen Ausdrücke bildet, so entsteht die in den Factor τ^2 multiplicirte Verbindung

$$(5.)\qquad \sum_a m_a\left(\left(\frac{dz_a}{dt}-\zeta_a\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2z_a}{dt^2}-\frac{Z_a}{m_a}\right)\tau\right)^2,$$

welche zu einem Minimum zu machen ist.

Die hiebei vorausgesetzte Auffassung von dem Princip des kleinsten Zwanges liegt der Verallgemeinerung dieses Princips zu Grunde, welche Herr *Schering* in dem Aufsatze: *Hamilton-Jacobi*sche Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt, Band XVIII der Abh. der K. G. d. Wiss. zu Göttingen, vorgetragen hat. Um den obigen Ausdruck (5.) aus Herrn *Schering*s Formeln zu erhalten, sind die für dieselben gemachten allgemeineren Voraussetzungen durch die einfachen Voraussetzungen eines Problems der thatsächlich geltenden Mechanik zu ersetzen. Bei dieser Vereinfachung tritt das Specifische von Herrn *Schering*s Auffassung des Princips des kleinsten Zwanges besonders deutlich hervor, und man kann zu einem sichern Urtheil über die Berechtigung dieser Auffassung gelangen.

Die gestellte Aufgabe, den obigen Ausdruck (5.) zu einem Minimum zu machen, unterscheidet sich von der für den Ausdruck (1.) gelösten Minimumsaufgabe dadurch, dass bei der erstern sowohl die Werthe $\frac{d^2z_a}{dt^2}$, wie auch die Werthe $\frac{dz_a}{dt}$ zu bestimmen sind, während bei der letztern nur die Werthe $\frac{d^2z_a}{dt^2}$ zu bestimmen waren. Deshalb sind jetzt die $\mathfrak{l}$ Bedingungsgleichungen (2.) und die $\mathfrak{l}$ Bedingungsgleichungen (3.) in der Weise zu berücksichtigen, dass die $\frac{d^2z_a}{dt^2}$ und die $\frac{dz_a}{dt}$ als veränderlich gelten. Wenn man also $\mathfrak{l}$ Multiplicatoren ϱ_a und ausserdem $\mathfrak{l}$ Multiplicatoren einführt, welche mit $\tau\sigma_a$ bezeichnet werden mögen, so darf die betreffende Forderung so

ausgesprochen werden, dass der Ausdruck

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum_{a} m_a \left(\left(\frac{dz_a}{dt} - \zeta_a \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 z_a}{dt^2} - \frac{Z_a}{m_a} \right) \tau \right)^2 - 2 \sum_{\alpha} \varrho_\alpha \sum_{a} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a} \frac{dz_a}{dt} \\ \qquad - \tau \sum_{\alpha} \sigma_\alpha \left(\sum_{a} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a} \frac{d^2 z_a}{dt^2} + \sum_{a,b} \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial z_a \partial z_b} \frac{dz_a}{dt} \frac{dz_b}{dt} \right) \end{cases}$$

zu einem Minimum werden soll.

Daraus ergeben sich nach den bekannten Regeln die Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} m_a \left(\frac{dz_a}{dt} - \zeta_a \right) + \frac{m_a}{2} \left(\frac{d^2 z_a}{dt^2} - \frac{Z_a}{m_a} \right) \tau = \sum_{\alpha} \varrho_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a} + \tau \sum_{\alpha} \sigma_\alpha \sum_{b} \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial z_a \partial z_b} \frac{dz_b}{dt}, \\ m_a \left(\frac{dz_a}{dt} - \zeta_a \right) + \frac{m_a}{2} \left(\frac{d^2 z_a}{dt^2} - \frac{Z_a}{m_a} \right) \tau = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a}. \end{cases}$$

Dass diese Gleichungen die Natur des entsprechenden mechanischen Problems nicht darstellen, kann ohne ausführliche Discussion eingesehen werden. Durch Subtraction der beiden Gleichungen von einander folgt die Relation

$$\sum_{\alpha} (\varrho_\alpha - \sigma_\alpha) \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_a} + \tau \sum_{\alpha} \sigma_\alpha \sum_{b} \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial z_a \partial z_b} \frac{dz_b}{dt} = 0$$

und dieselbe verlangt für den Fall $\mathfrak{l} = 1$, in dem nur *eine* Bedingungsgleichung $\Phi_1 = \text{const}$ gegeben ist, dass für jeden Zeiger a der Quotient

$$\frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_a}} \sum_{b} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_a \partial z_b} \frac{dz_b}{dt}$$

denselben Werth haben muss. Eine solche Vorschrift ist aber der theoretischen Mechanik völlig fremd. Aus diesen Gründen darf das Princip des kleinsten Zwanges, unter der bezeichneten zweiten Annahme nach *Gauss'* Worten formulirt, nicht angewendet werden.

Ich sagte vorhin, dass in dem von *Gauss* gegebenen Ausdrucke seines Princips die Bedeutung der Worte: freie Bewegung eines Punktes *nicht von vorne herein* feststehe. Meine Ansicht geht jedoch dahin, dass *Gauss* durch den von ihm geführten *Beweis* erkennen lässt, welche Bedeutung jene Worte haben sollen. *Gauss* stützt seinen Beweis auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, und es kommt darauf an, ob zugegeben wird, dass bei dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die virtuellen Verschiebungen der Punkte sämmtlich als kleine Grössen derselben Ordnung angenommen werden müssen. Wird dies zugegeben, so müssen diejenigen Grössen, welche

Gauss in seinem Beweise $c\gamma$, $c'\gamma'$, $c''\gamma''$, ... nennt, sämmtlich kleine Grössen derselben Ordnung sein. Diese Voraussetzung trifft aber nur bei unserer ersten Annahme zu, wo die Curve, welche ein Punkt des in Bewegung begriffenen Massensystems in der That beschreibt, und die Curve, welche der Punkt bei der fingirten freien Bewegung beschreiben würde, dieselbe Tangente haben, während die bezügliche Voraussetzung bei der zweiten Annahme nicht unbedingt zutrifft. Für meine Person zweifle ich nicht, dass das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die bezeichnete Voraussetzung in sich schliessen müsse. Weil sich aber für die Nothwendigkeit dieser Bedingung vermöge der Natur des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten nicht wohl ein bindender Beweis erbringen lässt, so habe ich eine analytische Erörterung vorgezogen, die, so viel ich zu sehen vermag, vollständig überzeugend ist.

Die zuletzt angestellte Betrachtung zeigt zugleich an, auf welche Weise das Princip des kleinsten Zwanges zu modificiren ist, um für solche Werthe der Geschwindigkeitscomponenten, die mit den Bedingungsgleichungen des Problems unvereinbar sind, die in der theoretischen Mechanik anerkannten Resultate zu deduciren. Es genügt, dass bei einer ersten Anwendung des Princips die auf den Zeitmoment $t+\tau$ bezüglichen Coordinaten der Massenpunkte nur mit einer bis zu der Ordnung τ gehenden Genauigkeit genommen werden. Dann kommen zunächst weder bei der Betrachtung der wirklich erfolgenden Bewegung die zweiten Ableitungen der Coordinaten, noch bei der Betrachtung der fingirten freien Bewegung die gegebenen wirkenden Kräfte ins Spiel, und die ersten Ableitungen der wirklich erfolgenden Bewegung werden durch die Forderung bestimmt, dass der Ausdruck

$$(8.)\qquad \sum_a m_a \left(\frac{dz_a}{dt} - \zeta_a\right)^2$$

zu einem Minimum werde. Mit Hinzuziehung der auf diesem Wege erhaltenen Werthe $\frac{dz_a}{dt}$ ist alsdann die zweite Forderung zu befriedigen, dass durch die Wahl der zweiten Ableitungen $\frac{d^2z_a}{dt^2}$ der Ausdruck (1.) zu einem Minimum gemacht werde. Indessen kann ich hiebei eine Bemerkung nicht unterdrücken, welche sich nicht sowohl auf die Behandlung, als auf das Wesen des betreffenden mechanischen Problems bezieht. Wenn angenommen wird, dass bei einem System bewegter Massenpunkte für einen Zeitmoment Geschwindigkeitscomponenten eintreten, die mit den herrschenden Bedin-

gungsgleichungen im Widerspruche stehen, und dass nach dem Verlaufe einer verschwindend kleinen Zeit τ die einzelnen Punkte des Systems Geschwindigkeiten angenommen haben, die den Bedingungsgleichungen genügen und mit denen die Bewegung den gegebenen wirkenden Kräften gemäss fortgeht, so kann die Umwandlung der gegebenen Geschwindigkeitscomponenten in die wirklich beibehaltenen Geschwindigkeitscomponenten nur so stattfinden, dass die Summe der dem System imprimirten lebendigen Kräfte innerhalb der verschwindend kleinen Zeit τ einen Verlust erleidet. Indem aber die Formeln der theoretischen Mechanik einen solchen Vorgang darstellen, so muss die Annäherung an den wahren Sachverhalt eine weit geringere sein, als für diejenigen mechanischen Probleme erreicht wird, bei deren Darstellung eine augenblickliche Verletzung der Stetigkeit und ein augenblicklicher Verlust an lebendiger Kraft nicht vorauszusetzen ist.

3.

Nachdem es sich herausgestellt hat, dass das Princip des kleinsten Zwanges auf diejenige Grösse zu beziehen ist, welche in dem vorigen Art. mit (1.) bezeichnet wurde, soll der Ausdruck derselben für die Voraussetzung ermittelt werden, dass statt der rechtwinkligen Coordinaten z_a der Massenpunkte des in Bewegung befindlichen Systems ein beliebiges System von n unabhängigen Variabeln eingeführt wird. Bekanntlich hängt die Transformation des Systems von Differentialgleichungen (4.) in Art. 2 nur davon ab, dass die quadratische Form der n Differentiale dz_a, $\frac{1}{2}\sum_a m_a dz_a^2$, und der aus den Componenten der wirkenden Kräfte gebildete Ausdruck $\sum_a Z_a dz_a$ in den neuen Variabeln dargestellt werden. Man habe, in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung des Art. 1,

$$(1.) \qquad \tfrac{1}{2}\sum_a m_a dz_a^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b = f(dx),$$

und ferner

$$(2.) \qquad \sum_a Z_a dz_a = \sum_a X_a dx_a.$$

Die l Functionen Φ_a der Coordinaten z_a verwandeln sich in Functionen der Variabeln x_a, und die Gleichungen (2.) und (3.) des vorigen Art. werden respective durch die Gleichungen

$$(3.) \qquad \frac{d\Phi_a}{dt} = \sum_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a}\frac{dx_a}{dt} = 0,$$

$$(4.) \qquad \frac{d^2\Phi_a}{dt^2} = \sum_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a}\frac{d^2 x_a}{dt^2} + \sum_{a,b}\frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial x_a \partial x_b}\frac{dx_a}{dt}\frac{dx_b}{dt}$$

ersetzt. An die Stelle der Gleichungen (4.) des vorigen Art. treten alsdann die folgenden ebenfalls mit den unbestimmten Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mathfrak{l}$ gebildeten Gleichungen, bei denen die in Art. 1 definirten Bezeichnungen von Differentialen auf Differentialquotienten übertragen sind,

$$(5.)\qquad \sum_b a_{a,b}\left(\frac{d^2x_b}{dt^2}+\xi_b\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dx}{dt}\right)\right)-X_a = \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_a}+\cdots+\lambda_\mathfrak{l}\frac{\partial\Phi_\mathfrak{l}}{\partial x_a}.$$

Vermöge der Gleichung (7.) des Art. 1 können dieselben auch die Gestalt annehmen

$$(6.)\qquad \Psi_a\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dx}{dt}\right)-X_a = \lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_a}+\cdots+\lambda_\mathfrak{l}\frac{\partial\Phi_\mathfrak{l}}{\partial x_a}.$$

Nun folgt aus der Gleichung (6.) des Art. 1, dass die Summe $\sum_a \Psi_a\left(\frac{dx}{dt},\frac{dx}{dt}\right)\delta x_a$, und aus der Natur der Grössen X_a, dass die Summe $\sum_a X_a\delta x_a$ bei der Einführung eines beliebigen andern Systems von Variabeln in den entsprechend gebildeten Ausdruck übergeht, das heisst zu der Form $f(dx)$ und dem vorliegenden Problem covariant ist. Mithin hat auch die Summe

$$(7.)\qquad \sum_a\left(\Psi_a\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dx}{dt}\right)-X_a\right)\delta x_a$$

dieselbe Eigenschaft. Es möge jetzt die Form $f(dx)$ durch die Einführung eines beliebigen andern Systems von Variabeln $y_\mathfrak{t}$ in die Form $g(dy)=\frac{1}{2}\sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}} e_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}dy_\mathfrak{t}dy_\mathfrak{l}$ übergehen, ferner sei die Determinante $|e_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}|=E$, und das adjungirte Element $\frac{\partial E}{\partial e_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}}=E_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}$. Wenn die linearen Ausdrücke

$$a_{a,1}dx_1+a_{a,2}dx_2+\cdots+a_{a,n}dx_n = p_a$$

und

$$e_{\mathfrak{t},1}dy_1+e_{\mathfrak{t},2}dy_2+\cdots+e_{\mathfrak{t},n}dy_n = q_\mathfrak{t}$$

in die betreffenden Formen eingeführt werden, so verwandelt sich jede einzelne Form wie folgt in ihre adjungirte Form

$$2f(dx)=\sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}p_ap_b,\quad 2g(dy)=\sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}\frac{E_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}}{E}q_\mathfrak{t}q_\mathfrak{l},$$

und zugleich muss vermöge der Gleichung $f(dx)=g(dy)$ die Gleichung

$$(8.)\qquad \sum_{a,b}\frac{A_{a,b}}{\Delta}p_ap_b = \sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}\frac{E_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}}{E}q_\mathfrak{t}q_\mathfrak{l}$$

gelten. Sobald man ein anderes System von unabhängigen Variationen δx_a und das entsprechende System von Variationen $\delta y_\mathfrak{t}$ anwendet, so ergiebt sich aus der ausgeführten Transformation auch die Gleichung

$$\sum_{a,b}a_{a,b}dx_a\delta x_b = \sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}e_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}dy_\mathfrak{t}\delta y_\mathfrak{l},$$

welche vermöge der Grössen p_a und q_t durch die Gleichung

$$(9.)\qquad \sum_a p_a \delta x_a = \sum_t q_t \delta y_t$$

ersetzt werden kann. Diese Gleichung bezeichnet die lineare Abhängigkeit, welche zwischen den Grössen p_a und q_t stattfindet, und es leuchtet ein, dass, wofern zwischen zwei Grössensystemen p_a und q_t die Gleichung (9.) erfüllt ist, die Gleichung (8.) daraus folgen muss.

Die Thatsache, dass die obige Summe (7.) zu der Form $f(dx)$ und unserem mechanischen Problem covariant ist, hat die Bedeutung, dass die Ausdrücke $\Psi_a\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) - X_a$ zu den mit einem System neuer Variabeln entsprechend gebildeten Ausdrücken in derselben Beziehung stehen, wie sie in (9.) zwischen den Grössen p_a und q_t vorgeschrieben ist. Mithin muss der aus der linken Seite von (8.) entstehende Ausdruck

$$(10.)\qquad \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta}\left(\Psi_a\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) - X_a\right)\left(\Psi_b\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) - X_b\right)$$

bei der Einführung eines Systems neuer Variabeln dem entsprechend gebildeten Ausdrucke gleich sein. *Der Ausdruck* (10.) *ist also zu der Form* $f(dx)$ *und dem betreffenden mechanischen Problem covariant.*

Aus dieser Eigenschaft ergiebt sich sogleich die Gestalt, welche die Verbindung (10.) annimmt, wofern statt der Variabeln x_a die rechtwinkligen Coordinaten z_a wieder eingeführt werden. Wegen der Gleichung (1.) sind die adjungirten Elemente $\frac{A_{ab}}{\Delta}$ für den Fall, dass a und b von einander verschieden sind, durch die Null, dagegen für den Fall $a = b$ durch $\frac{1}{m_a}$ zu ersetzen. Nach (6.) geht $\Psi_a\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right)$ in den Ausdruck $m_a \frac{d^2 z_a}{dt^2}$, und nach (2.) die Grösse X_a in die Grösse Z_a über. Mithin entsteht der Ausdruck

$$(11.)\qquad \sum_a \frac{1}{m_a}\left(m_a \frac{d^2 z_a}{dt^2} - Z_a\right)^2,$$

welcher dem Ausdrucke (1.) des Art. 2 identisch gleich ist. *Durch die Covariante* (10.) *des gegebenen mechanischen Problems wird daher diejenige Grösse dargestellt, welche bei dem Princip des kleinsten Zwanges zu einem Minimum zu machen ist.* Die Vergleichung der Covariante (10.) mit der Covariante (13.) des Art. 1 zeigt, dass der Bau ein völlig übereinstimmender ist. Die zu der Form $2f(dx)$ adjungirte Form liegt beiden Covarianten zu Grunde. Die Covariante (13.) in Art. 1 ist gleich einer Differenz von zwei

Werthen der adjungirten Form, von denen der eine mit den Systemen von Variabeln $\Psi_\mathfrak{b}(dx, \overset{1}{dx})$ und $\Psi_\mathfrak{c}(\delta x, \overset{1}{\delta x})$, der andere mit den Systemen von Variabeln $\Psi_\mathfrak{b}(\delta x, \overset{1}{dx})$ und $\Psi_\mathfrak{c}(dx, \overset{1}{\delta x})$ gebildet wird. Die obige Covariante (10.) ist gleich einem Werthe der adjungirten Form, bei dem nur *ein* System von Variabeln auftritt, das durch die Differenz $\Psi_\mathfrak{a}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) - X_\mathfrak{a}$ dargestellt wird.

Durch Hinzuziehung der Differentialgleichungen (6.) kann man die Covariante (10.) weiter umformen, indem statt $\Psi_\mathfrak{a}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) - X_\mathfrak{a}$ die Summe $\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}}$, und, was dasselbe ist, statt $\Psi_\mathfrak{b}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}\right) - X_\mathfrak{b}$ die Summe $\sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\mathfrak{b}}$ substituirt wird. So erhält sie den Ausdruck

$$(12.) \qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \sum_{\alpha,\beta} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\varDelta} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}} \lambda_\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\mathfrak{b}}.$$

Führt man jetzt nach dem in Bd. 71 dieses Journals, pag. 277 gegebenen Schema die Bezeichnungen ein

$$(13.) \qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\varDelta} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\mathfrak{b}} = (\alpha, \beta),$$

so wird die Covariante (10.) gleich der folgenden Doppelsumme, bei der die Zeiger α und β von 1 bis $\mathfrak{l}$ gehen

$$(14.) \qquad \sum_{\alpha,\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta (\alpha, \beta).$$

Diesen Ausdruck der Grösse, welche bei dem Princip des kleinsten Zwanges zu einem Minimum gemacht werden muss, habe ich für die Voraussetzung, dass das in Bewegung stehende System von Massenpunkten einer Reihe von Bedingungsgleichungen, aber keinen beschleunigenden Kräften unterworfen sei, Bd. 81 dieses Journals, pag. 231 angeführt.

4.

Wenn man das Problem der Mechanik in der Weise ausdehnt, dass für jeden Massenpunkt das Quadrat des Linearelements im Raume gleich einer beliebigen wesentlich positiven quadratischen Form von den Differentialen der Coordinaten angenommen wird, dass in Uebereinstimmung hiermit die Summe der lebendigen Kräfte der sämmtlichen Massenpunkte des in Bewegung begriffenen Systems gleich einer wesentlich positiven

quadratischen Form $2f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ von den nach der Zeit t genommenen Differentialquotienten der Coordinaten x_a ist, und dass der Ausdruck $\sum_a X_a \delta x_a$ und die l Bedingungsgleichungen $\Phi_a =$ const eine entsprechende Bedeutung behalten, so ergiebt sich vermöge der in der Abhandlung: Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Bd. 74 dieses Journals pag. 116 u. ff. entwickelten Grundsätze ein System von Differentialgleichungen, welches vollkommen dieselbe Gestalt hat, wie das System von Differentialgleichungen (6.) des vorigen Artikels. Ein Ausdruck, welcher unter den bezeichneten Voraussetzungen aus der gegebenen quadratischen Form $2f(dx)$ und der Summe $\sum_a X_a \delta x_a$ nach denjenigen Vorschriften gebildet wird, welche in dem vorigen Art. für die Bildung der Verbindung (10.) gegeben sind, muss aus den gleichen Gründen eine Covariante in Bezug auf das erweiterte mechanische Problem sein, und diese Covariante ist als die Ausdehnung desjenigen Begriffes zu betrachten, der für das ursprüngliche mechanische Problem durch den Ausdruck (10.) dargestellt wird. Auch zeigt sich leicht, dass, wenn man die Werthe x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ als gegeben betrachtet und die Forderung aufstellt, die Werthe $\frac{d^2x_a}{dt^2}$ so zu bestimmen, dass die in Rede stehende Covariante ein Minimum wird, ein System von Gleichungen entsteht, welches mit dem System von Differentialgleichungen des betreffenden erweiterten mechanischen Problems zusammenfällt. Hierin besteht aber die zugehörige Ausdehnung von dem Princip des kleinsten Zwanges.

Die angeführte im 74ten Bande dieses Journals befindliche Abhandlung bezieht sich auf eine noch weitere Ausdehnung des mechanischen Problems, bei der für jeden Massenpunkt das Linearelement im Raume durch die p^{te} Wurzel aus einer wesentlich positiven Form des p^{ten} Grades von den Differentialen der Coordinaten ersetzt, und die lebendige Kraft jedes Massenpunktes gemessen wird, indem man die Masse des Punktes mit der p^{ten} Potenz des Linearelements multiplicirt und durch die p^{te} Potenz des Zeitelements dividirt. Der p^{te} Theil der Summe der lebendigen Kräfte aller Massenpunkte eines bewegten Systems ist dann gleich einer wesentlich positiven Form des p^{ten} Grades von den nach der Zeit t genommenen Differentialquotienten der Coordinaten x_a sämmtlicher Punkte $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, eine Function U der Va-

riabeln x_a vertritt die Kräftefunction, die l Bedingungsgleichungen $\Phi_a = \text{const}$ kommen hinzu, und die Analogie von *Hamiltons* Variationsproblem führt zu der Forderung, dass die erste Variation des Integrals

$$(1.)\quad \int_{t_0}^{t}\left(f\left(\frac{dx}{dt}\right)+U\right)dt$$

zum Verschwinden gebracht werde. An der citirten Stelle ist angenommen, dass die Variabeln des Problems so gewählt sind, dass sie die gegebenen Bedingungsgleichungen erfüllen. In der Abhandlung: Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie, Bd. VI der mathematischen Annalen von *Clebsch* und *Neumann*, pag. 416, ist dagegen das Problem genau wie oben formulirt. Daselbst ist zu der Function U, die unter dem Integralzeichen des Integrals (1.) erscheint, der mit den unbestimmten Multiplicatoren λ_a gebildete Ausdruck $\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2+\cdots+\lambda_l\Phi_l$ hinzuaddirt. Das dem Variationsproblem zugehörige System von Differentialgleichungen lautet demnach, wie folgt,

$$(2.)\quad \frac{d\dfrac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\frac{dx_a}{dt}}}{dt}-\frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x_a} = \frac{\partial U}{\partial x_a}+\lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_a}+\cdots+\lambda_l\frac{\partial\Phi_l}{\partial x_a}.$$

Es stellt sich nun heraus, dass das Princip des kleinsten Zwanges hinreichend stark ist, um auch auf diesem Gebiete Stich zu halten. Wenn man auf der linken Seite von (2.) die Glieder, welche die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2x_a}{dt^2}$ enthalten, von denjenigen Gliedern, in welchen nur die ersten Differentialquotienten vorkommen, sondert, so entsteht der Ausdruck

$$(3.)\quad \sum_b \frac{\partial^2 f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\frac{dx_a}{dt}\,\partial\frac{dx_b}{dt}}\frac{d^2x_b}{dt^2}+f_a\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

in dem $f_a\left(\frac{dx}{dt}\right)$ eine homogene Function des p^{ten} Grades der $\frac{dx_a}{dt}$ bedeutet. Diese Darstellung ist aus Bd. 70 dieses Journals, pag. 76 entnommen, und die dortige Formel (10.) sagt zugleich aus, dass die Summe

$$(4.)\quad \sum_a\left(\sum_b \frac{\partial^2 f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial\frac{dx_a}{dt}\,\partial\frac{dx_b}{dt}}\frac{d^2x_b}{dt^2}+f_a\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)\delta x_a$$

mit der Form $f(dx)$ covariant ist. Desgleichen hat die Summe

$$(5.)\qquad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial U}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}}$$

einen von dem System der gewählten Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ unabhängigen Werth. Wofern das System von Differentialgleichungen (2.) dem System von Differentialgleichungen (5.) des vorigen Art. auch darin angepasst werden soll, dass an die Stelle der $\frac{\partial U}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$ die beliebigen Functionen $X_{\mathfrak{a}}$ treten, so muss die Bedingung festgehalten werden, dass die Summe $\sum_{\mathfrak{a}} X_{\mathfrak{a}} \delta x_{\mathfrak{a}}$ ebenfalls von dem System der gewählten Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ unabhängig sei, damit das System von Differentialgleichungen einen von seiner Bezeichnungsweise unabhängigen Sinn habe. Der Kürze halber werde ich für die zweiten Ableitungen der Form $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ die Bezeichnung einführen

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}\, \partial \frac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt}} = a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Dann fallen die Ausdrücke $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, sobald $p = 2$ ist, mit den Coefficienten der Form $2f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ zusammen und bekommen demgemäss ihre frühere Bedeutung; bei einer Form des p^{ten} Grades, für die $p > 2$ ist, sind sie aber gleich Formen des $(p-2)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente $\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}$. Es sei ferner die Determinante $|a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}| = \Delta$ und das adjungirte Element $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} = A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$.

Wenn die Form $f(dx)$ durch die Substitution eines Systems von beliebigen neuen Variabeln $y_{\mathfrak{k}}$ in die Form $g(dy)$ übergeht, und den Variationen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ wieder die Variationen $\delta y_{\mathfrak{k}}$ entsprechen, so ergiebt eine algebraische Grundeigenschaft der homogenen Functionen die Gleichung

$$(7.)\qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}}} \delta x_{\mathfrak{a}} \delta x_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{k}} \partial dy_{\mathfrak{l}}} \delta y_{\mathfrak{k}} \delta y_{\mathfrak{l}},$$

die vermöge der Bezeichnung (6.) und der entsprechenden Bezeichnung

$$\frac{\partial^2 g\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial \frac{dy_{\mathfrak{k}}}{dt}\, \partial \frac{dy_{\mathfrak{l}}}{dt}} = e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$$

zu der folgenden Gleichung führt

$$(7^*.)\qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \delta x_{\mathfrak{a}} \delta x_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} \delta x_{\mathfrak{k}} \delta x_{\mathfrak{l}}.$$

Hieraus ist nun auf die im vorigen Art. entwickelte Weise zu schliessen, dass, wofern die Determinante $|e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}|$ gleich E und das adjungirte Element $\frac{\partial E}{\partial e_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}$ gleich $E_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$ gesetzt wird, und wenn für zwei Systeme von Grössen $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{k}}$ die mit den willkürlichen correspondirenden Variationen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ und $\delta y_{\mathfrak{k}}$ gebildete Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{a}} p_{\mathfrak{a}} \delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{k}} q_{\mathfrak{k}} \delta y_{\mathfrak{k}}$$

besteht, nothwendig die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta} p_{\mathfrak{a}} p_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}} \frac{E_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{E} q_{\mathfrak{k}} q_{\mathfrak{l}}$$

stattfindet. Weil also nach den gemachten Bemerkungen die Summen (4.) und (5.) zu unserm Problem covariant sind, und auch für die statt (5.) substituirbare Summe $\sum_{\mathfrak{a}} X_{\mathfrak{a}} \delta x_{\mathfrak{a}}$ dasselbe gilt, so ist der Ausdruck

$$(8.) \quad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Big(\sum_{\mathfrak{c}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{c}}}{dt^2} + f_{\mathfrak{a}}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) - \frac{\partial U}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{b}}}{dt^2} + f_{\mathfrak{b}}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) - \frac{\partial U}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\Big)$$

eine Covariante für das aufgestellte Variationsproblem, und der Ausdruck

$$(9.) \quad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Big(\sum_{\mathfrak{c}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{c}}}{dt^2} + f_{\mathfrak{a}}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) - X_{\mathfrak{a}}\Big)\Big(\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{b}}}{dt^2} + f_{\mathfrak{b}}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) - X_{\mathfrak{b}}\Big)$$

eine Covariante für das System von Differentialgleichungen, das aus dem System (2.) *durch die Substitution von $X_{\mathfrak{a}}$ statt $\frac{\partial U}{\partial x_{\mathfrak{a}}}$ entsteht,*

$$(10.) \quad \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{b}}}{dt^2} + f_{\mathfrak{a}}\Big(\frac{dx}{dt}\Big) = X_{\mathfrak{a}} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}} + \cdots + \lambda_{\mathfrak{l}} \frac{\partial \Phi_{\mathfrak{l}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}.$$

Die Covariante (9.) verwandelt sich, sobald die Form $f(dx)$ eine quadratische Form wird und die Voraussetzungen der thatsächlich geltenden Mechanik eintreten, in die Covariante (10.) des Art. 3, und hat, wie die allgemeinen Regeln der Minimumsaufgaben lehren, mit dieser die gemeinsame Eigenschaft, dass aus der Forderung, den Werth von (9.) bei gegebenen Werthen der $x_{\mathfrak{a}}$ und $\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}$ durch die Bestimmung der Werthe der $\frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2}$ zu einem Minimum zu machen, das zugeordnete System von Differentialgleichungen (10.) hervorgeht. In Folge der $\mathfrak{l}$ Bedingungsgleichungen $\Phi_\alpha = \text{const}$ sind nämlich auch hier die Gleichungen massgebend, welche den Gleichungen (3.) und (4.) des Art. 3 entsprechen,

$$\frac{d\Phi_\alpha}{dt} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi_\alpha}{dt^2} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \frac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 \Phi_\alpha}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}}} \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt} \frac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt} = 0.$$

Weil ferner bei der Minimumsaufgabe die Grössen x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ als unveränderlich betrachtet werden, so figuriren die Verbindungen $a_{a,b}$ auch für eine Form des p^{ten} Grades, wo $p > 2$ ist, nur als unveränderliche Grössen, und aus derselben Ursache haben die Summen $\sum_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a} \frac{d^2 x_a}{dt^2}$, wie früher, unveränderliche Werthe. Hierauf gründet sich der Beweis der aufgestellten Behauptung, dass durch den Gebrauch der Covariante (9.) das Princip des kleinsten Zwanges auf diejenige Erweiterung des Problems der Mechanik übertragen werden kann, welche in dem System von Differentialgleichungen (10.) enthalten ist.

5.

Die in Art. 2 angeführte Untersuchung Herrn *Scherings* bezieht sich auf die Annahme, dass das Quadrat des Linearelements im Raume gleich einer beliebigen wesentlich positiven quadratischen Form von den Differentialen der Coordinaten sei, und verfolgt das Ziel, auf diesem Gebiete vermöge einer Ausdehnung des Begriffs der Kraft und einer Ausdehnung von dem Princip des kleinsten Zwanges zu dem System von Differentialgleichungen zu gelangen, welches aus der entsprechenden Verallgemeinerung von *Hamiltons* Variationsproblem erhalten war. Herrn *Scherings* Deduction schliesst sich bei der beabsichtigten Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges genau an die von *Gauss* gewählten Ausdrücke an, veranlasst jedoch ausser der oben erörterten Einwendung noch eine zweite. Jene Deduction müsste dem Anspruch genügen, dass sie für den Fall, dass das Quadrat des Linearelements im Raume als ein Aggregat der Quadrate von drei Differentialen darstellbar ist, dass also der betrachtete Raum wieder zu dem *Euklid*ischen Raume selbst wird, keine anderen Begriffe darstelle, als die in dem ursprünglichen Gedankengange enthaltenen. Für den Fall des *Euklid*ischen Raumes unterscheiden sich aber die in der Deduction des Herrn *Schering* gebrauchten Coordinaten, denen keine speciellen Eigenschaften beigelegt sind, in keinem Stück von den allgemeinen Coordinaten, durch welche ein Punkt im *Euklid*ischen Raume bestimmt wird. Bei Herrn *Scherings* Auffassung ist das Quadrat der Ablenkung eines Punktes von seiner freien Bewegung gleich dem Quadrate der Entfernung zweier Punkte, deren Coordinaten um Grössen von einander differiren, die nicht sämmtlich nur von der ersten Ordnung sind. Nun leuchtet ein, dass, wenn ein Punkt

im *Euklid*ischen Raume auf rechtwinklige Coordinaten z_1, z_2, z_3 bezogen wird, das Quadrat des Linearelements im Raume den Ausdruck

$$(1.)\qquad dz_1^2+dz_2^2+dz_3^2,$$

und zugleich das Quadrat der Entfernung zweier beliebigen Punkte $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$, $z_3^{(1)}$ und $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(2)}$ den Ausdruck

$$(2.)\qquad (z_1^{(2)}-z_1^{(1)})^2+(z_2^{(2)}-z_2^{(1)})^2+(z_3^{(2)}-z_3^{(1)})^2$$

hat. Sobald dagegen derselbe Punkt z_1, z_2, z_3 des Raumes auf beliebige Coordinaten x_1, x_2, x_3 bezogen wird, und das Quadrat des Linearelements (1.) in die Form

$$(3.)\qquad a_{11}dx_1^2+a_{22}dx_2^2+a_{33}dx_3^2+2a_{23}dx_2dx_3+2a_{31}dx_3dx_1+2a_{12}dx_1dx_2$$

übergeht, so darf nicht behauptet werden, dass das Quadrat der Entfernung der Punkte $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$, $z_3^{(1)}$ und $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(2)}$ allgemein richtig ausgedrückt werde, sobald man aus den zugeordneten Coordinaten $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ und $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$ derselben Punkte den Ausdruck

$$(4.)\qquad \begin{cases} a_{11}(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})^2+a_{22}(x_2^{(2)}-x_2^{(1)})^2+a_{33}(x_3^{(2)}-x_3^{(1)})^2+2a_{23}(x_2^{(2)}-x_2^{(1)})(x_3^{(2)}-x_3^{(1)}) \\ \qquad +2a_{31}(x_3^{(2)}-x_3^{(1)})(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})+2a_{12}(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})(x_2^{(2)}-x_2^{(1)}). \end{cases}$$

bildet. Schon die Transformation der rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten reicht hin, um dies Verfahren als ein unstatthaftes zu erkennen. Es ist jedoch im Grunde genau das Verfahren, dessen sich Herr *Schering* pag. 11 seiner Abhandlung bedient, wo er das Quadrat der Abweichung einer möglichen von der freien Bewegung eines Punktes ausdrücken will. Herr *Schering* nennt hier die Coordinatenunterschiede allerdings Differentiale; doch sind die von ihm gegebenen Ausdrücke der Coordinatenunterschiede Aggregate aus Gliedern, die in Bezug auf das Element der Zeit von der ersten und der zweiten Ordnung sind, und die Punkte, welche in den Formeln auf die genannten Glieder folgen, deuten auf Glieder von noch höherer Ordnung hin. Damit das Verfahren auch nur für die Glieder der ersten und der zweiten Ordnung gültig wäre, müsste aus der Gleichheit der Ausdrücke (1.) und (3.) allgemein der Schluss gezogen werden können, dass, wenn für die Werthe $\mathfrak{a}=1, 2, 3$ die Differenzen $z_\mathfrak{a}^{(2)}-z_\mathfrak{a}^{(1)}$ durch die Aggregate $dz_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}d^2z_\mathfrak{a}$, und zugleich die Differenzen $x_\mathfrak{a}^{(2)}-x_\mathfrak{a}^{(1)}$ durch die entsprechenden Aggregate $dx_\mathfrak{a}+\frac{1}{2}d^2x_\mathfrak{a}$ ersetzt werden, der Ausdruck (2.) dem Ausdruck (4.) gleich wird. Hiernach müsste in Folge der Gleichsetzung der Glieder gleich hoher Ordnung die Gleichung

$$\sum_\mathfrak{a} dz_\mathfrak{a}\, d^2z_\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{a}\, d^2x_\mathfrak{b}$$

bestehen, die auch bei dem angeführten Beispiel der Transformation rechtwinkliger Coordinaten in Polarcoordinaten unrichtig ist.

Die Arbeit des Herrn *Schering* erregt den Wunsch, zu erfahren, wie der Begriff der auf einen Punkt wirkenden Kraft in dasjenige Gebiet zu übertragen sei, dem das Variationsproblem des im vorigen Art. mit (1.) bezeichneten Integrals angehört. Es wird bei demselben Problem jetzt angenommen, dass nur ein einziger Punkt von der Masse Eins sich frei bewege. Das Linearelement für den auf die Coordinaten x_a bezogenen Punkt hat dann den Ausdruck $\sqrt[p]{pf(dx)}$, und die Forderung, dass die erste Variation des Integrals

$$(5.)\quad \int \sqrt[p]{pf(dx)}$$

verschwinde, bestimmt für die Coordinaten x_a die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche in dem bezüglichen Raume der kürzesten Linie entspricht. Wenn man sich die Variabeln x_a als abhängig von einer Variable t denkt, so kann das Integral (5.) die Gestalt erhalten

$$(5^*.)\quad \int_{t_0}^{t} \sqrt[p]{pf\left(\frac{dx}{dt}\right)}\,dx,$$

in der das Differential dt herausfällt. Es bleibt daher bei dem für das Integral (5*.) gestellten Variationsproblem noch völlig unbestimmt, in welcher Weise die Variabeln x_a von der Variable t abhängen sollen. Das zugehörige System von Differentialgleichungen, welches Bd. 74 dieses Journals pag. 124 angegeben ist, lautet

$$(6.)\quad \frac{d\dfrac{\partial \sqrt[p]{pf\left(\frac{dx}{dt}\right)}}{\partial \frac{dx_a}{dt}}}{dt} - \frac{\partial \sqrt[p]{pf\left(\frac{dx}{dt}\right)}}{\partial x_a} = 0.$$

Die Grössen x_a sind durch dasselbe vollständig bestimmt, wenn für den Werth $t = t_0$ die Anfangswerthe $x_a(0)$ und die $n-1$ Verhältnisse der Anfangsdifferentiale $dx_a(0)$ gegeben sind, und wir nehmen an, dass die Integration für diese Daten geleistet sei. Der Werth des Integrals (5*.), welcher r genannt werden möge, repräsentirt demgemäss die Länge der von dem Punkte $x_a(0)$ bis zu dem Punkte x_a ausgedehnten kürzesten Linie oder die Entfernung des Punktes x_a von dem Punkte $x_a(0)$, und genügt,

als reine Function der Werthsysteme $x_a(0)$ und x_a dargestellt, der am angeführten Orte in (7^b.) enthaltenen Gleichung

$$(7.)\quad \begin{cases} \delta r = \dfrac{1}{\left(pf\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}} \sum_a \dfrac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}} \delta x_a \\ \qquad - \dfrac{1}{\left(pf_0\left(\frac{dx(0)}{dt}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}} \sum_a \dfrac{\partial f\left(\frac{dx(0)}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a(0)}{dt}} \delta x_a(0); \end{cases}$$

die Anhängung des Zeichens 0 an die Form $f(dx)$ bedeutet die Substitution der Grössen $x_a(0)$ statt der correspondirenden x_a in die Coefficienten der Form. Auch in der vorstehenden Gleichung (7.) kann das Differential dt nur formell auftreten, und hebt sich vermöge der Homogeneität der Form $f(dx)$ heraus.

Wir betrachten jetzt das Variationsproblem des Integrals

$$(8.)\quad \int_{t_0}^{t} \left(f\left(\frac{dx}{dt}\right) + U\right) dt$$

unter der Voraussetzung, dass die Kräftefunction u eine reine Function der auf ein festes System $x_a(0)$ und das bewegliche System x_a bezogenen Function r sei; dieselbe werde $P(r)$ genannt. Dies Problem bildet eine Verallgemeinerung des Problems der freien Bewegung eines Punktes, bei dem die gegebene Kräftefunction eine reine Function der Entfernung des bewegten Punktes von einem festen Punkte ist. Unter der Annahme, dass die Form $f(dx)$ eine quadratische Form sei, die zu einem gewissen Geschlecht von Formen gehört, ist diese Aufgabe in der Abhandlung: Extension of the planetproblem to a space of n dimensions and constant integral curvature, Quarterly journal of mathematics, No. 48, pag. 349 gelöst worden, und zwar mit der Bedingung, dass für einen Zeitmoment $t = t_1$ die Werthe x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ beliebig gegeben sind. Herr *Schering* hat die gleiche Aufgabe bei einer etwas erweiterten Annahme in Betreff der Kräftefunction für einen Raum von n Dimensionen und constantem Krümmungsmasse in der oben citirten Abhandlung pag. 35 gelöst. Bei der gegenwärtigen Erörterung darf die Gradzahl p der Form $f(dx)$ eine beliebige sein, dagegen wird festgesetzt, dass für den Zeitmoment $t = t_0$, die Variabeln x_a die Werthe $x_a = x_a(0)$ annehmen sollen, welche für die Bildung der Grösse r gewählt sind. Es wird

also die freie Bewegung eines unter dem Einfluss einer Kräftefunction $P(r)$ stehenden Punktes ins Auge gefasst, welche Bewegung mit demjenigen festen Punkte beginnt, von dem aus die Entfernung r gemessen ist. Die Differentialgleichungen des bezeichneten Variationsproblems ergeben sich aus den Differentialgleichungen (2.) des vorigen Art., indem die Bedingungsfunctionen fortfallen, und U durch $P(r)$ ersetzt wird; sie sind daher diese

$$(9.)\qquad \frac{d\dfrac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}}}{dt} - \frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x_a} = \frac{\partial r}{\partial x_a}\frac{dP(r)}{dr}.$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass bei der getroffenen Annahme, nach welcher für $t = t_0$ die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ gelten, diese Differentialgleichungen für die Variabeln x_a dieselbe Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung vorschreiben, welche durch das System (6.) bestimmt ist. Das heisst, der unter dem Einflusse der Kräftefunction $P(r)$ stehende Punkt muss sich von dem Punkte $x_a(0)$ aus auf einer kürzesten Linie bewegen. Man kann vermöge einer Bd. 74 pag. 124 dieses Journals in (3^{b*}.) ausgeführten Umformung dem obigen System (6.) die folgende Gestalt geben

$$(10.)\qquad \frac{d\dfrac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}}}{dt} - \frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x_a} = \frac{1}{\left(pf\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}}\frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}}\frac{d\left(pf\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}}{dt}.$$

Wegen der Gleichung (7.) hat der partielle Differentialquotient der durch die Grössen x_b und $x_b(0)$ ausgedrückten Function r, in Bezug auf den einzelnen Werth x_a genommen, den Ausdruck

$$(11.)\qquad \frac{\partial r}{\partial x_a} = \frac{1}{\left(pf\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}}\frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}}.$$

Mithin verwandelt sich das System (10.) in dieses

$$(12.)\qquad \frac{d\dfrac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}}}{dt} - \frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x_a} = \frac{\partial r}{\partial x_a}\frac{d\left(pf\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}}}{dt}.$$

Da r der Werth des Integrals (5*.) ist, so besteht die Gleichung

$$(13.)\quad \frac{dr}{dt} = \left(pf\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man hat deshalb für das System (12.) auch den Ausdruck

$$(14.)\quad \frac{d\dfrac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \frac{dx_a}{dt}}}{dt} - \frac{\partial f\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial x_a} = \frac{\partial r}{\partial x_a}\,\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)^{p-1}}{dt}.$$

Die linke Seite der Gleichung (14.) ist für jeden Werth des Zeigers a mit der linken Seite der Gleichung (9.) identisch, desgleichen stimmt der auf der rechten Seite befindliche Factor $\frac{\partial r}{\partial x_a}$ überein. Da nun das System (14.) nur die Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung für die Variabeln x_a determinirt, die Abhängigkeit der einzelnen Variable von der Variable t jedoch unbestimmt lässt, so ist es möglich, diese Abhängigkeit so einzurichten, dass das System (6.) mit dem System (9.) zusammenfällt, und dies geschieht durch die Annahme der Gleichung

$$(15.)\quad \frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)^{p-1}}{dt} = \frac{dP(r)}{dr}.$$

Die gesuchte Integration des Systems (9.), bei der für $t = t_0$ die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ gelten und die Anfangswerthe $\frac{dx_a}{dt} = \frac{dx_a(0)}{dt}$ den entsprechenden bei der Integration des Systems (6.) oder (14.) gewählten Differentialen proportional sein sollen, ergiebt also, wie behauptet worden, für die Variabeln x_a diejenige Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche durch das System (14.) vorgezeichnet ist und einer kürzesten Linie entspricht, während die Gleichung (15.) die Abhängigkeit des in der kürzesten Linie durchlaufenen Weges r von der Zeit t bestimmt. Hier übernimmt der nach der Grösse r genommene Differentialquotient der Function $P(r)$ die Rolle der auf den Punkt von der Masse Eins wirkenden Kraft. Denn die Gleichung (15.) sagt aus, dass bei der in Rede stehenden Bewegung, die auf einer von dem Punkte $x_a(0)$ ausgehenden kürzesten Linie erfolgt, der nach der Zeit genommene Differentialquotient der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz des nach der Zeit genommenen ersten Differentialquotienten des Weges r gleich der gegebenen Grösse $\frac{dP(r)}{dr}$ sei. Für den Werth $p = 2$ geht aber diese Regel in den Satz über, dass bei der betreffenden Bewegung der nach der Zeit genommene

zweite Differentialquotient des Weges r gleich der gegebenen Grösse $\frac{dP(r)}{dr}$ sein muss. Des einfacheren Ausdrucks halber habe ich angenommen, dass bei der Integration des Systems (9.) für $t = t_0$ die Anfangswerthe $x_a = x_a(0)$ vorgeschrieben, und die Anfangswerthe $\frac{dx_a}{dt} = \frac{dx_a(0)}{dt}$ den bei der Integration des Systems (6.) gewählten Werthen der Anfangsdifferentiale proportional gegeben seien. Doch kann die Reduction des Systems (9.) auf das System (6.) in genau derselben Weise bewerkstelligt werden, wenn verlangt wird, dass bei dem System (9.) für einen beliebigen Zeitmoment $t = t_1$ überhaupt solche Werthe $x_a = x_a(1)$ und $\frac{dx_a}{dt} = \frac{dx_a(1)}{dt}$ gelten sollen, die aus der Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche durch die ausgeführte Integration des Systems (6.) bestimmt ist, entnommen sind. Das heisst in einer andern Sprache, dass die Bewegung des unter dem Einflusse der Kräftefunction $P(r)$ stehenden Punktes, wenn sie an einem beliebigen Punkte einer durch den festen Punkt $x_a(0)$ gehenden kürzesten Linie und zwar in der Richtung dieser kürzesten Linie beginnt, stets auf dieser kürzesten Linie bleibt und der Gleichung (15.) gehorcht.

Die Gleichung (15.), mit $\frac{dr}{dt}$ multiplicirt, bekommt die Gestalt

$$(p-1)\left(\frac{dr}{dt}\right)^{p-1}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dP(r)}{dt};$$

sie erlaubt die unbestimmte Integration

$$(16.)\qquad \frac{p-1}{p}\left(\frac{dr}{dt}\right)^p = P(r)+H,$$

wo H eine willkürliche Constante bedeutet, deren Werth sich durch die gegebenen Anfangswerthe bestimmt. Die Gleichung (16.) geht vermöge (13.) in die Gleichung

$$(17.)\qquad (p-1)f\left(\frac{dx}{dt}\right) = P(r)+H$$

über. Dieselbe ist für das vorliegende Problem nichts anderes, als die Bd. 74 dieses Journals, pag. 123 mit (5^a.) notirte Gleichung, und vertritt daher das Integral der lebendigen Kraft. Aus der Gleichung (16.) folgt die Gleichung

$$(18.)\qquad dt = \frac{dr}{\sqrt[p]{\frac{p}{p-1}(P(r)+H)}},$$

welche durch die Ausführung einer Quadratur und einer Umkehrung die Abhängigkeit des Weges r von der Zeit t ergiebt.

Bonn, den 13. November 1876.

Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite* adressée à M. *L. Fuchs.*

Soit

$$Z(x) = \frac{H'(x)}{H(x)};$$

on peut à l'aide de cette fonction représenter toute fonction uniforme, ayant pour périodes $2K$ et $2iK'$, par une formule, entièrement analogue à celle d'une fraction rationnelle décomposée en fractions simples, à savoir:

$$\begin{aligned} F(x) = \text{const.} &+ AZ(x-a) + A_1 D_x Z(x-a) + A_2 D_x^2 Z(x-a) + \cdots \\ &+ BZ(x-b) + B_1 D_x Z(x-b) + B_2 D_x^2 Z(x-b) + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ LZ(x-l) + L_1 D_x Z(x-l) + L_2 D_x^2 Z(x-l) + \cdots \end{aligned}$$

où les constantes $A, B, \ldots L$ sont essentiellement assujetties à remplir la condition:

$$A+B+\cdots+L = 0.$$

C'est cette expression, dont j'ai fait usage dans bien des circonstances, que je vais employer à la recherche des coordonnées d'une cubique plane en fonction explicite d'un paramètre. Je pose à cet effet:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + AZ(t-a) + BZ(t-b) + CZ(t-c), \\ y &= y_0 + A'Z(t-a) + B'Z(t-b) + C'Z(t-c), \end{aligned}$$

avec les conditions:

$$A+B+C=0, \qquad A'+B'+C'=0,$$

de sorte que les coordonnées x et y se trouveront des fonctions linéaires des deux différences: $Z(t-a)-Z(t-c)$ et $Z(t-b)-Z(t-c)$. Cela étant, je remarque que x^2, xy, y^2 étant des fonctions doublement périodiques uniformes aux périodes $2K$ et $2iK'$, s'expriment linéairement, d'une part par ces deux différences, et de l'autre par les dérivées $D_t Z(t-a)$, $D_t Z(t-b)$, $D_t Z(t-c)$. Et pareillement, si l'on considère x^3, x^2y, xy^2, y^3, il résulte de la formule générale qu'on aura seulement les dérivées secondes: $D_t^2 Z(t-a)$, $D_t^2 Z(t-b)$, $D_t^2 Z(t-c)$ à joindre aux dérivées premières et aux

deux différences. Ce sont donc huit fonctions en tout, entrant linéairement dans les neuf fonctions doublement périodiques, que je viens de former, et la relation du troisième degré entre les coordonnées x et y en est la conséquence immédiate. J'ajoute que ces coordonnées renfermant, en premier lieu, les constantes $a, b, c,$ ou seulement $a-c, b-c,$ car on peut mettre $t-c$ au lieu de t, puis les coefficients A, B, A', B', et enfin x_0 et y_0, contiendront huit arbitraires, de sorte qu'en y joignant le module de la transcendante, on aura bien le nombre maximum égal à neuf, des indéterminées d'une cubique plane quelconque.

Soit maintenant:

$$x = x_0+A\,Z(t-a)+B\,Z(t-b)+C\,Z(t-c)+D\,Z(t-d),$$
$$y = y_0+A'\,Z(t-a)+B'\,Z(t-b)+C'\,Z(t-c)+D'\,Z(t-d),$$
$$z = z_0+A''Z(t-a)+B''Z(t-b)+C''Z(t-c)+D''Z(t-d),$$

avec les conditions

$$\Sigma A = 0, \quad \Sigma A' = 0, \quad \Sigma A'' = 0.$$

Ces trois quantités d'une part, et celles-ci de l'autre, à savoir: $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz,$ s'exprimeront en fonctions linéaires de $Z(t-a)-Z(t-d)$, $Z(t-b)-Z(t-d)$, $Z(t-c)-Z(t-d)$, et des quatre dérivées $D_t Z(t-a)$, etc. On a par conséquent sept fonctions, dans l'expression de neuf quantités, qui dès lors sont liées par deux équations, de sorte que les quantités considérées représentent bien l'intersection de deux surfaces du second ordre, et comme ci-dessus, on voit qu'elles contiennent le nombre d'arbitraires maximum que comporte une telle courbe, lequel est égal à seize.

Je reviens à la géométrie plane pour considérer les courbes de *Clebsch,* dont les coordonnées sont des fonctions elliptiques d'un paramètre, que je prends sous la forme suivante:

$$x = x_0+A\,Z(t-a)+B\,Z(t-b)+\cdots+L\,Z(t-l),$$
$$y = y_0+A'Z(t-a)+B'Z(t-b)+\cdots+L'Z(t-l),$$

en supposant toujours:

$$\Sigma A = 0, \quad \Sigma A' = 0.$$

Le succès de la méthode précédente dans le cas de la cubique m'a fait tenter d'établir par la même voie que x et y satisfont à une équation algébrique d'un dégré égal au nombre des transcendantes: $Z(t-a), Z(t-b), \ldots Z(t-l)$. Mais les choses se passent alors moins simplement. Considérez en effet

les diverses fonctions homogènes de x et y, jusqu'au degré μ, dont le nombre sera $2+3+\cdots+\mu+1=\frac{1}{2}(\mu^2+3\mu)$, et soit m le nombre des transcendantes. Toutes ces fonctions doublement périodiques s'expriment linéairement par les différences: $Z(t-a)-Z(t-l)$, $Z(t-b)-Z(t-l)$, ... en nombre $m-1$, puis par les dérivées jusqu'à l'ordre $\mu-1$, des quantités $Z(t-a)$, c'est-à-dire en tout par $m-1+m(\mu-1)$ fonctions. Afin donc de pouvoir effectuer l'élimination de ces fonctions, je pose la condition:

$$\tfrac{1}{2}(\mu^2+3\mu)=m+m(\mu-1)=m\mu$$

qui me donne $\mu=2m-3$, de sorte que je parviens par cette voie à une courbe d'ordre $2m-3$, au lieu d'obtenir l'ordre m. Le procédé qui réussit dans le cas de $m=3$, donne donc en général un degré trop élevé, et j'ai dû complétement y renoncer, comme méthode d'élimination. Mais l'existence, au moins, d'une équation de ce degré m se prouve très-facilement. Considérez pour cela une droite arbitraire $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, dont les points de rencontre avec la courbe s'obtiendront en déterminant t par l'équation:

$$\alpha x_0+\beta y_0+\gamma+(A\alpha+A'\beta)Z(t-a)+(B\alpha+B'\beta)Z(t-b)+\cdots = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction doublement périodique qui devient infinie pour les m valeurs:

$$t = a, \quad b, \quad c, \quad \ldots \quad l.$$

Elle ne peut donc s'annuler, d'après un théorème connu de la théorie des fonctions elliptiques, que pour m valeurs de t, dans l'intérieur du rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$, et la courbe ne pouvant être coupée qu'en m points par une droite quelconque, est bien d'ordre m.

Ce même raisonnement appliqué à la polaire, dont les coordonnées sont:

$$X=\frac{-y'}{xy'-x'y}, \quad Y=\frac{x'}{xy'-x'y}$$

en détermine le degré.

Effectivement les intersections de cette seconde courbe avec la droite $\alpha X+\beta Y+\gamma=0$ sont données par l'équation:

$$-\alpha y'+\beta x'+\gamma(xy'-yx') = 0,$$

et vous voyez, que son premier membre est une fonction doublement périodique, admettant les infinis doubles $t=a, b, \ldots l$, de sorte qu'on a $2m$ racines, et par suite $2m$ points d'intersection. Connaissant l'ordre de la polaire des courbes de *Clebsch*, $\delta=2m$, le nombre d des points doubles de ces courbes en résulte immédiatement, comme conséquence de la relation

$2d + \delta = m(m-1)$, donnée dans mon cours d'analyse (page 385); l'on trouve ainsi par une voie facile la proposition fondamentale: $d = \frac{1}{2}m(m-3)$ démontrée par *Clebsch* t. 63 de ce journal, p. 189.

Paris, 29 juin 1876.

P. S. La détermination des points d'inflexion de la cubique plane, et des points stationnaires de la quadrique dans l'espace, dépendent des équations suivantes:

$$\begin{vmatrix} Z'(t-a)-Z'(t-c), & Z'(t-b)-Z'(t-c) \\ Z''(t-a)-Z''(t-c), & Z''(t-b)-Z''(t-c) \end{vmatrix} = 0$$

et:

$$\begin{vmatrix} Z'(t-a)-Z'(t-d), & Z'(t-b)-Z'(t-d), & Z'(t-c)-Z'(t-d) \\ Z''(t-a)-Z''(t-d), & Z''(t-b)-Z''(t-d), & Z''(t-c)-Z''(t-d) \\ Z'''(t-a)-Z'''(t-d), & Z'''(t-b)-Z'''(t-d), & Z'''(t-c)-Z'''(t-d) \end{vmatrix} = 0.$$

Je me suis proposé de calculer les déterminants qui forment les premiers membres, et j'ai trouvé les expressions suivantes. Soit pour abréger:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b, c) &= H(a-b)H(a-c)H(b-c), \\ \Phi(a, b, c, d) &= H(a-b)H(a-c)H(a-d) \\ &\qquad H(b-c)H(b-d) \\ &\qquad\qquad H(c-d), \end{aligned}$$

le premier déterminant est:

$$H'(0)^5 \frac{\Phi(a, b, c)H(3t-a-b-c)}{[H(t-a)H(t-b)H(t-c)]^3}$$

et le second:

$$H'(0)^9 \frac{\Phi(a, b, c, d)H(4t-a-b-c-d)}{[H(t-a)H(t-b)H(t-c)H(t-d)]^4}.$$

Les beaux résultats découverts par *Clebsch* sont la conséquence de ces expressions qui m'ont amené à considérer en général, le déterminant à $n-1$ colonnes:

$$\begin{vmatrix} Z'(t-a)-Z'(t-l), & Z'(t-b)-Z'(t-l), & \dots & Z'(t-k)-Z'(t-l) \\ Z''(t-a)-Z''(t-l), & Z''(t-b)-Z''(t-l), & \dots & Z''(t-k)-Z''(t-l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z^{n-1}(t-a)-Z^{n-1}(t-l), & Z^{n-1}(t-b)-Z^{n-1}(t-l), & \dots & Z^{n-1}(t-k)-Z^{n-1}(t-l) \end{vmatrix}$$

où $a, b, \ldots k, l$ sont n constantes. Si l'on pose comme précédemment:

$$\begin{aligned}\Phi(a, b, \ldots k, l) = H(a-b)H(a-c)\ldots H(a-l)\\ H(b-c)\ldots H(b-l)\\ \cdots\cdots\cdots\\ H(k-l)\end{aligned}$$

on trouve qu'il a pour valeur:

$$\mu H'(0)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)} \frac{\Phi(a, b, \ldots k, l) H(nt-a-b-\cdots-l)}{[H(t-a)H(t-b)\ldots H(t-l)]^n}$$

μ désignant un facteur numérique.

Paris, 29 décembre 1876.

Notiz zu dem Aufsatz über ein dreifach orthogonales Flächensystem S. 145 dieses Bandes.

(Von Herrn *Wangerin*.)

Durch eine Notiz des Herrn *G. Darboux* im 22. Heft des Bandes LXXXIII der Comptes rendus bin ich auf einige Arbeiten des genannten Verfassers aufmerksam gemacht, die mir bisher unbekannt waren. Aus diesen habe ich ersehen, dass nicht, wie ich am Schluss meiner Arbeit angegeben, Herr *Tisserand* zuerst das von mir behandelte Flächensystem untersucht, sondern dass schon früher Herr *Darboux* sich mit denselben Fragen beschäftigt hat. Die Resultate in den ersten Abschnitten meiner Arbeit, die ich für neu hielt, sind grösstentheils bereits von Herrn *Darboux* abgeleitet in den Comptes rendus LIX p. 240 und den Annales de l'école normale II p. 55, III p. 97. Neu bleibt jedoch bei meiner Arbeit die Reduction der Potentialgleichung für die betrachteten Flächen.

Berlin, den 13. December 1876.

